

## تحلیل پس کمانش برای ستون هایپیرالاستیک تحت بارگذاری فشاری محوری

کلید واژه : پس کمانش ، فرا مواد ، هایپیرالاستیک ، آنالیز مجانبی

### چکیده

کمانش ستون های صاف تحت فشار محوری بطور گسترده برای چندین دهه مطالعه شده است. اگرچه رفتار کمانش ستون های لاغر بخوبی پیش بینی شده است ولی رفتار پس کمانش ستون های عریض با نسبت های عرض به طول بالا (که در آنها غیرخطی هندسی و ماده حیاتی می شود) بررسی نشده است. در این مقاله، بصورت تحلیلی نشان داده شد که برای یک ستون هایپیرالاستیک صاف، افزایش نسبت عرض به طول آن می تواند حالت کمانش آن را از کمانش پیوسته به فروجهشی و ارتجاعی تغییر دهد. برهمین اساس، علامت شیب اولیه پس کمانش نیز از مثبت به منفی تغییر می کند و نهایتاً مجدداً مثبت می شود. با استفاده از یک آنالیز مجانبی براساس مکانیک محیط های پیوسته میتوان شیب اولیه پس کمانش را برحسب تابعی از نسبت عرض به طول ستون تعیین کرد و سپس نسبت های عرض به طول بحرانی برای تغییر حالت های کمانش را مشخص کرد که این نتایج بخوبی با نتایج شبیه سازی FEA مطابقت دارند. همچنین میتوان دریافت که با افزایش نسبت مدول برشی به حجمی که بیانگر تراکم پذیری ماده است، تغییر حالت کمانش از کمانش فروجهشی به ارتجاعی به یک نسبت عرض به طول بالاتر می رود. یک نمودار فازی حالت های کمانش برحسب نسبت عرض به طول و نسبت مدول برشی به حجمی نیز رسم شد. اگرچه آنالیز براساس یک ماده neo-Hookean خاص است ولی سایر مدل های neo-Hookean نیز نتایج مشابهی دارد. علاوه بر این، با افزایش نسبت مدول برشی به توده، که نشان دهنده تراکم پذیری مواد است، انتقال بین کمانش snapping-through و snapping-back به نسبت بحرانی عرض به طول بیشتر به تعویق می افتد. یک نمودار فاز از حالت های کمانش با توجه به نسبت عرض به طول و نسبت مدول برشی به حجم ساخته شده است که چارچوب پیشنهادی در این مقاله را می توان برای سایر قوانین ساختاری برای مطالعه اثر غیرخطی های مواد مختلف بر رفتار پس کمانش اعمال کرد.

کمانش ستون بعنوان نوعی گسیختگی (شکست) ماده در نظر گرفته می‌شود. اما اخیراً از آن برای طراحی فرامواد کاربردی از لحاظ مکانیکی استفاده شده است [۱] که در آن کمانش ستون مبنای بسیاری از ویژگی‌های مهم مانند نسبت پواسون قابل تنظیم [۲]، پاسخ‌های غیرخطی قابل برنامه‌ریزی [۳]، دگردهایی یا مورفینگ<sup>۱</sup> شکل [۴] و پایداری چندگانه [۵] است. کمانش و پس کمانش ستون‌ها شدیداً روی رفتار این فرامواد تأثیرگذار است.

منحنی زنجیره‌ای اوپلر<sup>۲</sup> ساده‌ترین تعریف برای کمانش ستون است که در آن ستون‌ها بصورت میله‌های الاستیک خطی مدلسازی شده‌اند که دچار تغییرشکل کوچک می‌شوند. این مدل پیش‌بینی می‌کند که یک ستون صاف که در معرض یک نیروی فشاری  $F$  یا برش  $\varepsilon$  است در یک شرایط بحرانی  $F_{cr}$  یا  $\varepsilon_{cr}$  دچار کمانش می‌شود و شیب پس کمانش  $S$  تعریف شده در معادله  $(F-F_{cr})/F_{cr} = S(\varepsilon-\varepsilon_{cr})$  یک مقدار ثابت و مثبت (۲/۱) دارد که مستقل از شرایط مرزی و هندسی است [۸]. این معادله بخوبی رفتار کمانش ستون‌های لاغر را پیش‌بینی می‌کند. اما با پهن‌تر شدن ستون، رفتار پس کمانشی آنها شدیداً تغییر می‌کند چون کرنش حیاتی برای کمانش ستون زیاد می‌شود و در نتیجه رفتار غیرخطی هندسی و ماده نقش کلیدی در ناحیه پس کمانش ایفا می‌کنند. با افزایش نسبت عرض به طول، حالت کمانش یک ستون هایپراالاستیک صاف تحت فشار محوری از کمانش پیوسته، فروجهشی به ارتجاعی تبدیل می‌شود. برهمین اساس، شیب پس کمانش اولیه از مثبت به منفی تغییر می‌کند و نهایتاً دوباره مثبت خواهد شد. برای پیش‌بینی رفتار خمش و کمانش ستون‌های عریض، چندین مدل تیرچه پیشنهاد شده است تا منحنی زنجیره‌ای اوپلر را توسعه دهند [۶]. اما هیچ کدام از مدل‌های تیرچه تک بعدی نمی‌توانند تغییر حالت‌های کمانش فروجهشی و ارتجاعی برحسب نسبت عرض به طول را نشان دهند. مدل‌های تیرچه ارائه شده در مقالات تغییرشکل‌های محوری و برشی را در نظر می‌گیرند ولی ماده سازنده را خطی فرض می‌کنند. این مدل‌ها می‌توانند پیش‌بینی کنند که با افزایش نسبت عرض به طول، شیب اولیه منحنی پس کمانش از ۲/۱ کاهش می‌یابد ولی

هم‌چنان مثبت باقی می‌ماند. اخیراً برخی محققان [۶] تلاش کرده‌اند غیرخطی بودن ماده را در این مدل‌ها جا دهند و در عین حال تیرچه بصورت قابل برش و بسط‌پذیر باشد. مدل پیشنهادی می‌تواند تغییرات شیب منحنی پس کمانش از مثبت به منفی را با افزایش نسبت عرض به طول نشان دهد ولی اگر این نسبت بیشتر زیاد شود آنگاه علامت شیب را به مثبت برنمی‌گرداند. علت این موضوع کرنش مرتبه بالا بدلیل غیرخطی هندسی است که در ناحیه پس کمانش ستون‌های عریض ناچیز نیست. هم‌چنین فرض سینماتیکی [۷] استفاده شده در این مدل‌ها (یعنی سطح مقطع تیرها بصورت غیرپیچشی در وضعیت تغییرشکل یافته باقی می‌ماند) برای ستون‌های عریض معتبر نیست.

در مقایسه با مدل‌های تیرچه تک بعدی، یک آنالیز دوشاخه‌شدگی<sup>۳</sup> براساس مکانیک محیط‌های پیوسته و دوبعدی (که غیرخطی بودن هندسی و ماده را در نظر می‌گیرد) می‌تواند رفتار کمانش و پس کمانش ستون‌های تحت فشار محوری را با دقت پیش‌بینی کند. شروع رفتار کمانش ستون‌های تحت فشار محوری در مقالات با حل کردن یک مسأله مقدار مرزی افزایشی بررسی شده است [۸-۹]. برای تعیین مسیرهای تعادل رفتار پس کمانش و پایداری آنها، یک روش مجانبی توسط کوپتر [۱۰] معرفی شد که بطور گسترده برای یافتن جواب‌های مسأله پس کمانش یک نیم فضای تحت فشار از ماده neo-Hookean [۱۱]، یک لایه هایپراالاستیک و نازک تحت فشار [۱۲]، یک لوله هایپراالاستیک تحت فشار محوری [۱۳] و یک میله الاستیک چسبیده به یک فونداسیون الاستیک [۱۴] استفاده می‌شود. در مقاله [۱۵] از این روش برای بررسی رفتار پس کمانش یک بلوک مستطیلی شکل و دوبعدی با قوانین ساختاری مختلف استفاده شده است و معلوم شد یک ستون نتراشیده که تحت فشار کنترل شده است می‌تواند یک مسیر تعادل ناپایدار داشته باشد که مربوط به حالت کمانش ارتجاعی است. اما تمامی حالت‌های کمانش برای ستون‌های تحت فشار محوری برحسب نسبت عرض به طول بصورت تحلیلی بررسی نشده‌اند که دلیل اصلی ما برای انجام این پژوهش است.

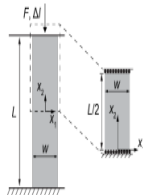
در این مقاله مقصود این است که مسأله شیب اولیه منحنی پس کمانش یک ستون هایپراالاستیک و صاف تحت فشار محوری با

<sup>3</sup> Bifurcation analysis

<sup>1</sup> morphing

<sup>2</sup> Euler's elastica

Riks انجام داده شد و نیروی عکس العمل تراکمی  $F$  محاسبه می‌شود. در شکل ۱، هر دو قسمت انتهایی ستون‌ها می‌توانند آزادانه در امتداد جهت افقی بلغزند ولی بصورت صاف باقی می‌مانند. تقارن بازتاب برای محور  $X_1$  فرض شد و به همین دلیل فقط نیمی از این ستون شبیه‌سازی می‌شود. نقص‌ها و عیب‌هایی به هندسه اولیه وارد می‌شوند تا منجر به کمانش و ناپایداری شوند.



شکل ۱ - شماتیکی از یک ستون هایپرااستیک و دوبعدی (سمت چپ) قرار گرفته در معرض یک نیروی تراکمی  $F$  یا یک جابجایی  $\Delta l$ . بدلیل تقارن، فقط نیمه بالایی این ستون (سمت راست) برای شبیه‌سازی و مدل‌سازی انتخاب شده است.

نتایج عددی در شکل ۲ بطور خلاصه بیان شد تا نشان دهد سه حالت کمانش برای ستون‌های هایپرااستیک صاف با نسبت‌های عرض به طول ( $w/L$ ) متفاوت و تحت فشار محوری وجود دارد. کرنش  $\epsilon$  بصورت  $\Delta l/L$  تعریف شد و جابجایی  $\Delta l$  بین دو انتهای ستون تقسیم بر طول اولیه آن  $L$  است. سپس منحنی‌های نرمال شده نیرو-کرنش  $F/w\mu-\epsilon$  در امتداد مسیرهای تعادل رسم شد (ستون دوم در شکل ۲) و شکل‌های تغییر یافته در سه موقعیت خاص روی این منحنی‌ها نشان داده شد: شروع کمانش ستون (نقطه ۱، ستون سوم در شکل ۲)، شروع چروک شدگی  $[18]$  - (نقطه ۱۶، ۱۷) (که یک تاشدگی بدون مقیاس است) روی قسمت متراکم ستون (نقطه ۲، ستون چهارم در شکل ۲) و برگشتن نیروهای عکس‌العمل (نقطه ۳، ستون پنجم در شکل ۲). هرگاه  $w/L$  کم باشد ( $w/L = 0.1$ ، ردیف دوم از شکل ۲)، هرچند شیب منحنی  $F/w\mu-\epsilon$  شدیداً پس از کمانش کم می‌شود ولی همچنان مثبت است. این حالت کمانش را کمانش پیوسته می‌نامند چون رفتار پس کمانش پایدار است و نیرو و کرنش بصورت پیوسته زیاد می‌شوند. با افزایش  $w/L$ ، رفتار کمانش ناپیوسته می‌شود. ( $w/L = 0.1$ ، ردیف دوم از شکل ۲)، نیرو کاهش می‌یابد در حالیکه کرنش پس از نقطه کمانش (نقطه ۱) زیاد می‌شود و منجر به یک شیب پس کمانش منفی می‌شود

استفاده از یک آنالیز پس کمانش مجانبی<sup>۴</sup> در چارچوب الاستیسیته تغییرشکل‌های بزرگ حل شود و تغییر حالت‌های کمانش از کمانش پیوسته، فروجهشی تا ارتجاعی برحسب نسبت عرض به طول ستون مورد بررسی قرار گیرد. نتایج توسط تحلیل المان محدود (FEA) تأیید خواهند شد. در بخش ۲، یافته‌های عددی و پیشین بسط داده میشوند تا نشان دهد که یک ستون هایپرااستیک دوبعدی و تحت فشار محوری می‌تواند سه حالت کمانش ذکر شده را با تغییر نسبت عرض به طول خود نشان دهد. در بخش ۳ یک آنالیز مجانبی براساس مکانیک محیط‌های پیوسته انجام داده شد که شامل غیرخطی‌های هندسی و ماده در مدل مورد نظر است تا شیب پس کمانش اولیه برحسب تابعی از نسبت عرض به طول تعیین شود. علاوه بر این، نسبت‌های بحرانی عرض به طول برای تغییر حالت‌های کمانش تعیین شد و تأثیر تراکم‌پذیری ماده روی این مقادیر بحرانی بررسی شد. پیش‌بینی پاسخ پس کمانش مطابقت خوبی با شبیه‌سازی به کمک روش المان محدود دارد.

## ۲- تغییر حالت‌های کمانش

ابتدا FEA با استفاده از نرم‌افزار تجاری Abaqus/Standard انجام داده شد تا سه حالت کمانش یک ستون هایپرااستیک و صاف تحت فشار محوری با تغییر نسبت عرض به طول آن تعیین شود. رابطه بنیادی استفاده شده در FEA همان قانون ماده neo-Hookean تراکم‌پذیر با معادله چگالی انرژی الاستیک زیر است:

$$(1) \quad W = \frac{\mu}{2} [J^{-2/3} \text{tr}(FF^T) - 2] + \frac{K}{2} (J - 1)^2,$$

که در آن  $F$  گرادینان تغییرشکل  $\partial u_i / (\partial X_j + \delta_{ij})$  بیانگر تغییر مکان در جهت  $X_i$  و  $\delta_{ij}$  بیانگر دلتای کرونگر است)،  $J$  دترمینان  $F$ ،  $\mu$  و  $K$  به ترتیب مدول برشی و حجمی هستند. با داشتن ضریب  $J^{-2/3}$ ، عبارت اول در انرژی کرنشی  $W$  در معادله فوق مربوط به تغییرشکل انحرافی است در حالی که عبارت دوم مربوط به تغییرشکل حجمی است. هرگاه  $K$  به بی‌نهایت نزدیک شود، مدل فوق بیانگر یک ماده neo-Hookean تراکم‌ناپذیر است که در شبیه‌سازی‌ها شکل ۲ برای بیان یک ماده هایپرااستیک عمومی استفاده شده است. شبیه‌سازی‌های کرنش صفحه‌ای دوبعدی (المان از نوع CPE8H در برنامه آباکوس) برای ستون‌هایی با عرض  $w$  و طول  $L$  تحت یک جابجایی محوری  $\Delta l$  را با استفاده از روش

<sup>5</sup> Creasing

<sup>4</sup> asymptotic post-buckling analysis

شیب اولیه پس کمانش گسترش داده شد و انتقال حالت های کمانش از پیوسته به بازگشت به عقب مورد بررسی قرار گرفت.

### ۳-۱ آنالیز مجانبی براساس مکانیک محیط های پیوسته

در این بخش یک آنالیز مجانبی براساس مکانیک محیط های پیوسته انجام داده شد [۱۵-۲۱] تا رفتار کمانشی و پس کمانشی ستون های تحت فشار محوری بررسی گردد. در مقاله [۲۲]، پایداری مسیر پس کمانش ستون های تحت فشار محوری مطالعه شده است. در اینجا این آنالیز بسط داده شده تا شیب پس کمانش اولیه تعیین شود و تبدیل حالت های کمانش از کمانش پیوسته به فروجهشی بررسی شود.

### ۳-۲ آنالیز دوشاخه شدگی

انرژی پتانسیل مورد نیاز برای تغییر شکل صفحه ای نیم ستون نشان داده شده در شکل ۱ عبارت است از:

(2)

$$\Pi[u; \varepsilon] = \int_A W dA = \int_0^L \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \left\{ \frac{\mu}{2} [J^{-23} \text{tr}(FF^T) - 2] + \frac{\kappa}{2} (J - 1)^2 \right\} dX_1 dX_2,$$

که در آن  $\mathbf{u}$  بیانگر میدان جابجایی،  $W$  تابع چگالی انرژی الاستیک است که از معادله ۱ بدست می آید. معادله وردشی<sup>۷</sup> تعادل را می توان با اعمال اصل انرژی پتانسیل ساکن بدست آورد که بصورت زیر است:

$$(3) \quad \Pi'[u; \varepsilon] \delta u = 0,$$

که در آن  $\Pi'$  مشتق مرتبه اول  $\Pi$  نسبت به  $\mathbf{u}$  است.

یک جواب پایه (اصلی) برای معادله ۳ وجود دارد که بصورت  $\mathbf{u}^0$  نشان داده می شود. این جواب مربوط به تغییر شکل همگن است و می توان آن را برحسب کشیدگی های اصلی بصورت زیر نوشت:

$$(4) \quad \mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 - 1)X_1 \\ (\lambda_2 - 1)X_2 \end{bmatrix},$$

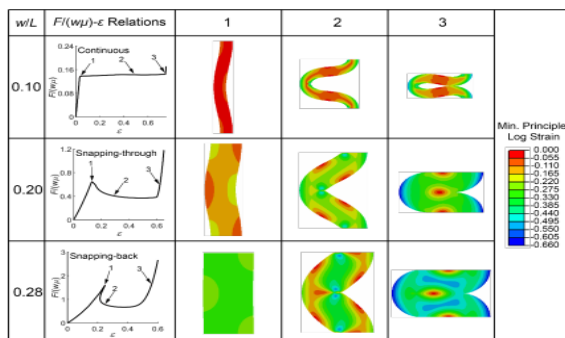
که در آن  $\lambda_1$  و  $2\lambda_2$  دو کشش اصلی در جهت های  $X_1$  و  $X_2$  هستند و از معادله زیر بدست می آیند:

$$(5) \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \lambda_2 = 1 - \varepsilon.$$

معادله اول در معادله ۵ نشان می دهد که تنش پیولا-کیرشهف<sup>۸</sup> اول در جهت  $X_1$  ناپدید می شود.

که نهایتا بدلیل self-contact بشدت زیاد می شود. این حالت کمانش با یک شیب پس کمانش منفی اصطلاحا کمانش فروجهشی نامیده می شود که معمولا در کمان یا طاق های کم عمق دیده می شود [۱۹]. هرگاه  $w/L=0.2$  باشد (ردیف چهارم در شکل ۲)، نیرو و کرنش پس از نقطه کمانش (نقطه ۱) کاهش می یابند و یک شیب پس کمانش مثبت را بوجود می آورند. این حالت کمانش با چنین رابطه نیرو-کرنشی همانند کمانش پیوسته<sup>۶</sup> است [۲۰] و کمانش ارتجاعی نامیده می شود. در مجموع، با افزایش  $w/L$  حالت کمانش از یک کمانش پیوسته به کمانش فروجهشی و نهایتا به کمانش ارتجاعی تغییر می یابد. برهمین اساس، شیب پس کمانش اولیه از یک مقدار مثبت به منفی تغییر می کند و نهایتا مجددا مثبت می شود.

نتایج عددی پیشین نشان دادند که مقدار  $w/L$  بحرانی برای تغییر حالت کمانش از کمانش فروجهشی به کمانش ارتجاعی برای یک ماده neo-Hookean تراکم ناپذیر حدود  $0.24/w$  است که در هیچ کدام از مدل های تیرچه موجود [۶-۷] پیش بینی نشده است..



شکل ۲ - سه حالت کمانش ستون تحت فشار محوری: کمانش پیوسته (ردیف دوم)، فروجهشی (ردیف سوم) و ارتجاعی (ردیف چهارم). روابط بین نیروی تراکمی نرمال شده  $(F/wL)$  و کرنش ( $\varepsilon$ ) در ستون دوم رسم شده اند. ستون های سوم تا پنجم نشان می دهند چگونه شکل ستون ها با افزایش کرنش تراکمی تغییر می کند. رنگ ها نشان دهنده سطح کرنش لگاریتمی مینیمم هستند. نسبت مدول برشی به حجمی  $\mu/K$  استفاده شده در FEA برابر با صفر است.

### ۳- تحلیل مجانبی مبتنی بر مکانیک پیوسته

در این بخش، یک تحلیل مجانبی مبتنی بر مکانیک پیوسته برای بررسی رفتار کمانش و پس کمانش ستون های فشرده شده محوری انجام داده شد. در اینجا تجزیه و تحلیل برای تعیین

<sup>8</sup> Piola-Kirchhoff

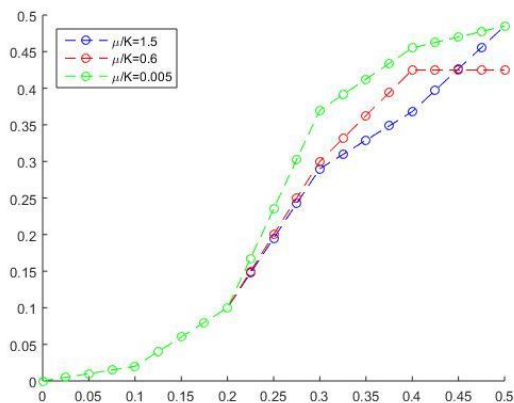
<sup>6</sup> shell buckling

<sup>7</sup> variational equation

آن می‌توان  $\epsilon_{cr}$  را حل کرد. به کمک معادله ۱۲ و معادله زیر می‌توان ضرایب  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  را بدست آورد که منجر به حالت کماتش  $u$  با نوسان واحد می‌شود.

$$(13) \quad \left\langle \frac{1}{u}, \frac{1}{u} \right\rangle = \frac{2}{LW} \int_0^L \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \frac{1}{u_i} \frac{1}{u_i} dx_1 dx_2 = 1,$$

کرنش بحرانی برای شروع کماتش ستون  $\epsilon_{cr}$  به نسبت مدول برشی به حجمی  $\mu/K$  و نسبت عرض به طول  $w/L$  بستگی دارد. شکل ۳ مقادیر  $\epsilon_{cr}$  برای کماتش ستون را برحسب تابعی از  $w/L$  و سه نسبت  $\mu/K$  متفاوت نشان می‌دهد. به ازای یک  $\mu/K$  مشخص و با افزایش نسبت  $w/L$ ، کرنش بحرانی  $\epsilon_{cr}$  بصورت یکنواخت از صفر افزایش می‌یابد. اما وابستگی  $\epsilon_{cr}$  به  $\mu/K$  یکنواخت نیست. برای ستون‌های ضخیم یعنی ستون‌های با  $w/L < 0.35$ ، حالت دارای یک  $\mu/K$  متوسط (منحنی قرمز رنگ در شکل ۳) پایین‌ترین مقدار  $\epsilon_{cr}$  را دارد. زمانی که کرنش بحرانی برای شروع کماتش از چروک‌شدگی برای یک  $w/L$  بالا بیشتر شود آنگاه چروک‌شدگی قبل از کماتش و در یک کرنش بحرانی ثابت (خطوط نقطه‌چین افقی) رخ می‌دهد [۲۳]. کرنش بحرانی برای شروع چروک‌شدگی تحت شرایط کرنش صفحه‌ای برای یک ماده neo-Hookean تراکم‌ناپذیر ( $\nu = 0$ ) برابر با  $0.354$  است و با افزایش  $\mu/K$  نیز بصورت غیریکنواخت تغییر می‌کند [۲۴]. فصل مشترک بین شرایط بحرانی کماتش و چروک‌شدگی نیز  $w/L$  بحرانی را تعیین می‌کند که در مقادیر کمتر از آن، ابتدا کماتش رخ می‌دهد و به ازای مقادیر بیشتر از آن نیز ابتدا چروک‌شدگی رخ می‌دهد.



شکل ۴ کرنش بحرانی  $\epsilon_{cr}$  برای شروع ناپایداری ستون برحسب تابعی از نسبت عرض به طول  $w/L$  و به ازای نسبت‌های مختلف مدول برشی به حجمی  $\mu/K$  منحنی‌ها بیانگر کرنش بحرانی برای کماتش ستون هستند در حالی که خطوط نقطه‌چین افقی نشان دهنده کرنش بحرانی برای

جواب پایه  $u$  در معادله ۴-۴ تا زمانی برقرار است که  $\epsilon$  به  $\epsilon_{cr}$  برسد چون پس از آن جواب دیگری برای معادله ۳-۴ برای کماتش ستون بدست می‌آید. کرنش بحرانی  $\epsilon_{cr}$  برای کماتش ستون را می‌توان بصورت تحلیلی و با حل مسأله مشخصه زیر تعیین کرد [۱۰-۱۵]:

$$(6) \quad \Pi'''[u^0(\epsilon_{cr}); \epsilon_{cr}] u^1 \delta u = 0$$

برای تمامی میدان‌های جابجایی مجاز  $\delta u$  که  $\Pi''$  مشتق دوم

$\Pi$  برحسب  $u$  است،  $u^0(\epsilon_{cr})$  جواب اصلی در  $\epsilon_{cr}$  و  $u^1$  حالت کماتش است.

با جایگذاری معادله ۲ در معادله ۶:

$$(7) \quad \Pi''[u^0(\epsilon_{cr}); \epsilon_{cr}] u^1 \delta u = \int_0^L \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \frac{\partial^2 w[u^0(\epsilon_{cr})]}{\partial u_{k,l} \partial u_{i,j}} u_{i,j}^1 \delta u_{k,l} dx_1 dx_2 = 0,$$

که در آن  $u_i$  و  $u_j$  به ترتیب مولفه‌های  $u$  و  $u$  در جهت  $X_i$  هستند و  $\partial(\cdot)/\partial X_j$  است. انتگرال‌گیری جزء به جزء به ما معادلات دیفرانسیلی اویلر-لاگرانژ را برای  $u^1$  می‌دهد که بصورت زیر است:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 w[u^0(\epsilon_{cr})]}{\partial u_{k,l} \partial u_{i,j}} u_{i,j}^1 = 0,$$

و شرایط مرزی متناظر با آن عبارتند از:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 w[u^0(\epsilon_{cr})]}{\partial u_{k,l} \partial u_{i,j}} u_{i,j}^1 = 0 \text{ at } X_1 = \pm \frac{w}{2},$$

$$(10) \quad \delta u_2 = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 w[u^0(\epsilon_{cr})]}{\partial u_{1,2} \partial u_{i,j}} u_{i,j}^1 = 0 \text{ at } X_2 = 0 \text{ and } L/2,$$

که  $\partial^2(\cdot)/\partial X_j \partial X_l$  است. جواب‌های معادله بصورت

زیر نوشته میشود:

$$(11) \quad \{ \begin{aligned} u_1^1 &= (\alpha_1 \cosh z_1 X_1 + \alpha_2 \cosh z_2 X_1) \cos \frac{2\pi X_2}{L} \\ u_2^1 &= (\alpha_3 \sinh z_1 X_1 + \alpha_4 \sinh z_2 X_1) \sin \frac{2\pi X_2}{L} \end{aligned}$$

که در آن  $Z_1$  و  $Z_2$  دو ریشه مثبت چندجمله‌ای مشخصه معادله ۸ هستند. با جایگذاری معادله ۱۱ در معادلات ۸ و ۹:

$$(12) \quad A[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] = 0.$$

یک جواب غیربدیهی (مخالص صفر) برای معادله ۱۲ زمانی وجود دارد که دترمینان ماتریس ضریب  $A$  از بین برود که به کمک

با جایگذاری معادله ۲ در معادله ۱۷ داریم:

$$(19) \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{W}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial u_{i,j} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \right] \frac{2}{u_{k,l}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial u_{i,j} \partial u_{m,n} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \right] \frac{1}{u_{k,l}} \frac{1}{u_{m,n}} \right] \delta u_{i,j} dX_1 dX_2 = 0$$

انتگرال گیری جزء به جزء از این معادله نیز معادله دیفرانسیل

اولر-لاگرانژ زیر را برای  $u^2$  خواهد داشت:

$$(20) \frac{\partial^2 w}{\partial u_{i,j} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \frac{2}{u_{k,l}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial u_{i,j} \partial u_{m,n} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \left( \frac{1}{u_{k,l}} \frac{1}{u_{m,n}} + \frac{1}{u_{k,l}} \frac{1}{u_{m,nj}} \right) = 0$$

و شرایط مرزی متناظر با آن عبارتند از:

$$(21) \frac{\partial^2 w}{\partial u_{i,j} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \frac{2}{u_{k,l}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial u_{i,l} \partial u_{m,n} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \frac{1}{u_{k,l}} \frac{1}{u_{m,n}} = 0 \text{ at } X_1 = \pm \frac{W}{2}$$

$$(22) \delta u_{z_2} = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 w}{\partial u_{1,2} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \frac{2}{u_{k,l}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial u_{1,2} \partial u_{m,n} \partial u_{k,l}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \frac{1}{u_{k,l}} \frac{1}{u_{m,n}} = 0 \text{ at } X_2 = 0 \text{ and } L/2$$

معادله ۲۲ بصورت خودکار برقرار است. بدلیل تعامد بین  $u$  و

$u^2$  داریم:

$$(23) \left\langle \frac{1}{u}, \frac{2}{u} \right\rangle = \frac{2}{LW} \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{W}{2}} \frac{1}{u} \frac{2}{u} dx_1 dx_2 = 0,$$

جوابهای معادله ۲۰ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(24) \left\{ \frac{2}{u_1} = B_1(X_1) \cos \cos \frac{4\pi X_2}{L} + C_1(X_1) \frac{2}{u_2} = B_2(X_1) \sin \sin \frac{4\pi X_2}{L} \right.$$

با جایگذاری معادله ۲۴ در معادلات ۲۰ و ۲۱ می توان  $u$  را

بدست آورد. سپس با جایگذاری  $u$  و معادله ۲ در معادله ۱۸ می توان عبارت زیر را برای  $\varepsilon_2$  بدست آورد:

$$(25) \varepsilon_2 = \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{W}{2}} \frac{\partial^3 w}{\partial u_{i,j} \partial u_{k,l} \partial u_{m,n} \partial u_{p,q} \partial u_{r,s} \partial u_{t,u}} \left( \frac{\partial^0 w}{u}(\varepsilon_{cr}) \right) \frac{1}{u_{k,l}} \frac{1}{u_{m,n}} \frac{1}{u_{p,q}} \frac{1}{u_{r,s}} \frac{1}{u_{t,u}} dx_1 dx_2}{\int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{W}{2}} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u_{i,j} \partial u_{k,l}} \right) \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_{cr}} \frac{1}{u_{k,l}} \frac{1}{u_{m,n}} dx_1 dx_2}$$

با داشتن یک کرنش فشاری مشخص  $\varepsilon$  می توان میدان جابجایی

$u$  روی مسیر تعادل کمانش ستون را با استفاده از معادلات ۱۴

و ۱۵ بدست آورد. نیروی اعمال شده  $F$  متناظر با  $\varepsilon$  را نیز می توان

از معادله زیر بدست آورد:

چروک شدگی در یک دال فشرده شده بصورت همگن هستند.

این خطوط در یک  $w/L$  بحرانی با هم برخورد می کنند که در

مقادیر کمتر از آن ابتدا کمانش رخ می دهد و در مقادیر بیشتر

از آن نیز ابتدا چروک شدگی رخ می دهد.

۳-۲ آنالیز پس کمانش

با تعیین کرنش بحرانی  $\varepsilon_{cr}$  برای شروع کمانش و حالت ویژه

متناظر با آن  $u$ ، میدان جابجایی  $u$  و کرنش فشاری  $\varepsilon$  را بصورت

مجانب وار در نزدیکی نقطه کمانش و در امتداد مسیر تعادل

کمانش ستون بسط داده شدو به معادلات زیر به دست آمد:

$$(14) u = u^0(\varepsilon) + \xi u^1 + \xi^2 u^2 + o(\xi^3),$$

$$(15) \varepsilon = \varepsilon_{cr} + \xi^2 \varepsilon_2 + o(\xi^4),$$

که در آن  $\xi$  دامنه حالت کمانش  $u$  است. بدلیل تقارن، فقط

عبارت های توانی فرد  $\xi$  در معادله ۱۵ وجود دارند به نحوی که

علامت  $\xi$  هیچ تأثیری روی  $\varepsilon$  ندارد. از آنجایی که  $u$  و  $\varepsilon$  که از

معادلات ۱۴ و ۱۵ بدست می آیند باید معادله

$$\prod [u; \varepsilon] \delta u = 0$$

را راضی کنند بنابراین یک بسط سری

تیلور حول نقطه کمانش به ما عبارت زیر را خواهد داد:

$$(16) \left( \Pi_{cr, u}''^2 + \frac{1}{2} \Pi_{cr, u}'''^1 2 \right) \delta u \xi^2 + \left( \varepsilon_2 \Pi_{cr, u}''^1 + \Pi_{cr, u}'''^1 2 + \frac{1}{6} \Pi_{cr, u}^{iv} 3 \right) \delta u \xi^3 + o(\xi^4) = 0$$

که در آن  $\prod_{cr}^{(n)}$  مشتق  $n$ ام در نقطه کمانش یعنی

$\prod_{cr}^{(n)} [u(\varepsilon_{cr}); \varepsilon_{cr}]$  است و مشتق اول برحسب  $\varepsilon$  است.

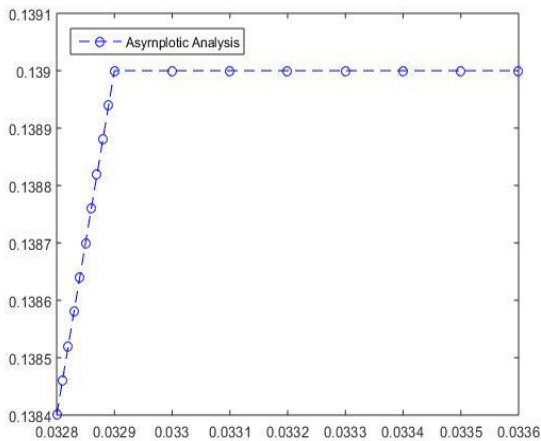
ضرایب  $\xi^2$  و  $\xi^3$  در معادله باید بصورت جداگانه ناپدید شوند

که یک معادله وردشی را برای  $u$  بدنبال خواهد داشت:

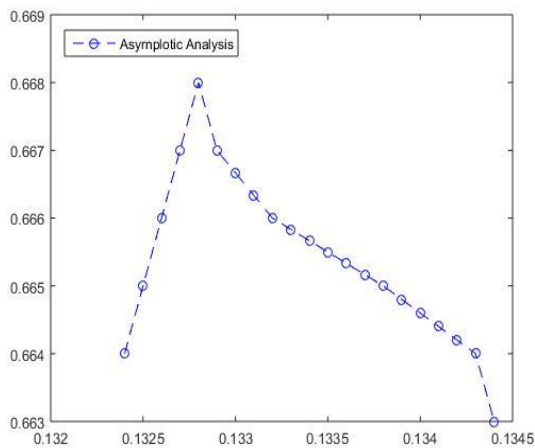
$$(17) \Pi_{cr, u}''^2 \delta u + \frac{1}{2} \Pi_{cr, u}'''^1 \frac{1}{u^2} \delta u = 0$$

و عبارت زیر با قرار دادن  $\delta u = u$  برای  $2\varepsilon$  بدست می آید:

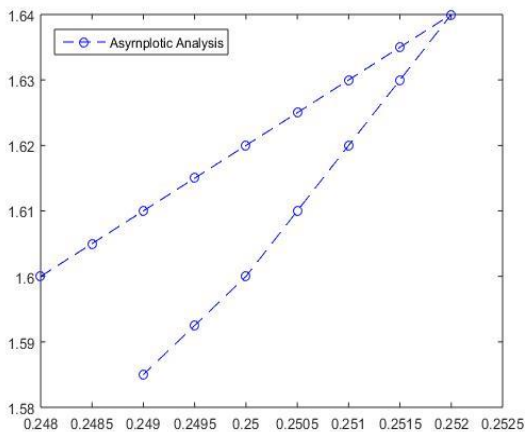
$$(18) \varepsilon_2 = - \frac{\Pi_{cr, u}'''^1 \frac{1}{u^2} + \frac{1}{6} \Pi_{cr, u}^{iv} \frac{1}{u^4}}{\Pi_{cr, u}''^2}$$



(b)  $w/l = 0.20$



(c)  $w/l = 0.28$



شکل ۴-مقایسه بین مسیره‌های پس کمانش پیش‌بینی شده توسط آنالیز مجانبی (خطوط پررنگ) و FEA (نقطه‌ها) تحت شرایط  $\mu/K = 0.005$  برای سه حالت کمانش ستون: (a) پیوسته ( $w/L = 0.10$ ), (b) فروجهشی ( $w/L = 0.20$ ) و (c) ارتجاعی ( $w/L = 0.28$ )

(26)

$$F = - \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\partial w}{\partial u_{1,1}} \Big|_{X_2 = L/2} dX_1 = F_{cr} + \xi^2 F_2 + o(\xi^4),$$

که در آن  $F_{cr}$  نیروی بحرانی برای کمانش ستون است. با ادغام کردن معادلات ۱۵ و ۲۶ و حذف متغیر واسطه  $\xi^2$  می‌توان رابطه بین نیرو  $F$  و کرنش  $\varepsilon$  را به صورت زیر نوشت:

$$(27) (F - F_{cr}) / F_{cr} = S(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) + o[(\varepsilon - \varepsilon_{cr})^2],$$

که در آن  $S$  شیب پس کمانش در نزدیکی نقطه کمانش است و از معادله زیر بدست می‌آید

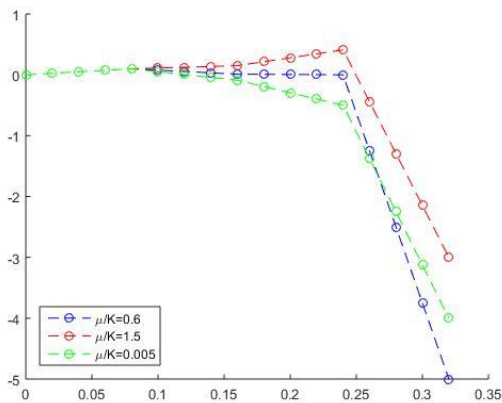
$$(28) S = \frac{F_2}{\varepsilon_2 F_{cr}}$$

برای تأیید این آنالیز پس کمانش، مسیره‌های پس کمانش پیش‌بینی شده توسط معادله ۲۷ با FEA در شرایط  $\mu/K = 0.005$  (مواد neo-Hookean تقریباً تراکم‌ناپذیر) مقایسه گردید (شکل ۴). ما سه مقدار را برای  $w/L$  انتخاب گردید که بیانگر سه حالت کمانش ستون هستند:  $w/L = 0.1$  (کمانش پیوسته)،  $w/L = 0.2$  (کمانش فروجهشی) و  $w/L = 0.3$  (کمانش ارتجاعی). در هر حالت، کرنش  $\varepsilon$  در ناحیه پس کمانش محدود به ۱ درصد بالاتر (کمانش پیوسته و فروجهشی) یا پایین‌تر (کمانش ارتجاعی) از کرنش بحرانی مربوطه  $\varepsilon_{cr}$  است به نحوی که معادله ۲۷ فقط با یک عبارت خطی از  $(\varepsilon - \varepsilon_{cr})$  بتواند تخمین دقیقی از نیرو  $F$  ارائه کند. شیب پس کمانش  $S$  که در معادله ۲۷ برای مقادیر مختلف از  $w/L$  تعریف شده است را می‌توان با استفاده از معادله ۲۸ بدست آورد که برای  $w/L = 0.1$  برابر با  $0.2974$ ، برای  $w/L = 0.2$  برابر با  $-5/788$  و برای  $w/L = 0.28$  برابر با  $12/06$  است. در نتیجه، مسیره‌های پس کمانش پیش‌بینی شده توسط معادله ۲۷ (خطوط پررنگ آبی) و توسط FEA (دایره‌های قرمز رنگ) مطابقت خوبی با هم دارند (درصد خطای کمتر از ۰/۰۲ درصد) (شکل ۴). حتی اگر کرنش  $\varepsilon$  در ناحیه پس کمانش ۵ درصد نسبت به کرنش بحرانی  $\varepsilon_{cr}$  افزایش (کمانش پیوسته و فروجهشی) یا کاهش (کمانش ارتجاعی) یابد باز هم برآوردهای معادله ۲۷ برای مسیره‌های پس کمانش دقیق هستند (درصد خطای کمتر از ۰/۳ درصد).

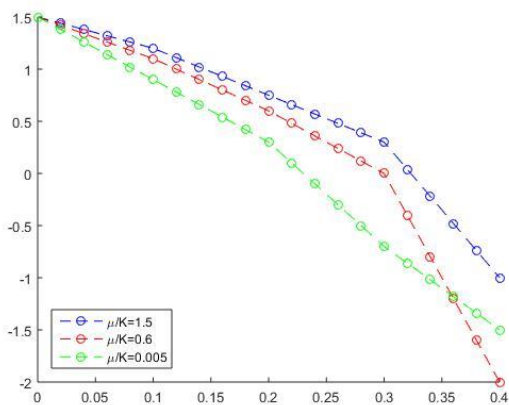
(a)  $w/l = 0.10$



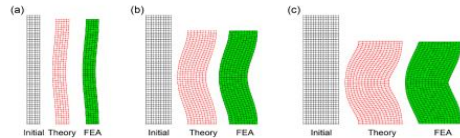
(a)



(b)



شکل ۶- عبارتهای درجه دوم نرمال شده در آنالیز مجانبی (a) نیروی فشاری  $F$  و (b) کرنش فشاری  $\epsilon$  برحسب تابعی از نسبت عرض به طول  $w/L$  و نسبت‌های مختلف از مدول برشی به حجمی  $\mu/K$  شکل داخلی (a) ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که در آن علامت نیرو از مثبت به منفی تغییر می‌کند. سپس  $S$  برحسب تابعی از  $w/L$  و مقادیر مختلف از  $\mu/K$  رسم شد (شکل ۷). برای تمامی مقادیر  $\mu/K$ ، زمانی که ستون بی‌نهایت لاغر است ( $w/L \ll 1$ ) شیب  $S$  با  $0.5$  شروع می‌شود که با پیش‌بینی‌های منحنی زنجیره‌ای اوپلر مطابقت دارد. برای یک ماده تقریباً تراکم‌ناپذیر با  $\mu/K=0.005$ ، هرچه ستون کلفت‌تر می‌شود ( $w/L$  زیاد می‌شود) شیب  $S$  کم می‌شود ولی مثبت می‌ماند تا زمانی که  $w/L = 0.103$  باشد چون در این نقطه، حالت کمانش از پیوسته به فروجهشی تغییر می‌کند. علامت  $S$  در  $w/L = 0.238$  مجدداً از منفی به مثبت تغییر



شکل ۵- مقایسه شکل‌های خمیده در آنالیز مجانبی و FEA تحت شرایط  $\mu/K = 0.005$  برای سه حالت کمانش ستون: (a) پیوسته ( $w/L = 0.10$ )، (b) فروجهشی ( $w/L = 0.20$ ) و (c) ارتجاعی ( $w/L = 0.28$ ). شکل اول بیانگر شکل اولیه ستون است در حالی که شکل‌های قرمز و سبز رنگ به ترتیب شکل خمیده پیش‌بینی شده توسط آنالیز مجانبی و FEA تحت کرنش ۵ درصد بالاتر (پیوسته و فروجهشی) یا پایین‌تر (ارتجاعی) از کرنش بحرانی هستند.

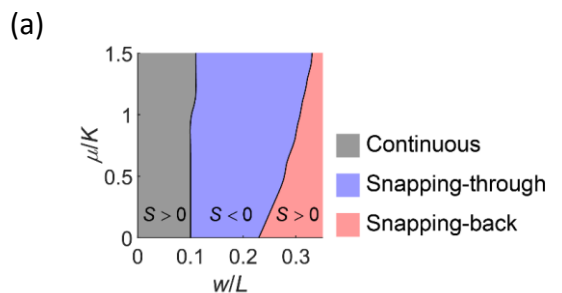
ما همچنین شکل‌های خمیده پیش‌بینی شده توسط آنالیز مجانبی و FEA در شرایطی مقایسه شد که کرنش  $\epsilon$  در ناحیه پس کمانش به  $\epsilon_{cr1,0.5}$  (پیوسته و فروجهشی) یا  $\epsilon_{cr0,9.5}$  (ارتجاعی) می‌رسد (شکل ۵). شکل‌های خمیده پیش‌بینی شده توسط آنالیز فوق با FEA در هر سه حالت کمانش همخوانی دارند. توجه داشته باشید که هرگاه  $w/L$  بزرگ است (خصوصاً برای کمانش ارتجاعی)، ستون مطابق نظریه تیموشنکو<sup>۹</sup> [۲۵]- [۲۶] دچار تغییر شکل برشی زیادی می‌شود. علاوه بر این، سطح مقطع‌هایی که در حالت اول صاف هستند پس از کمانش صاف باقی نمی‌مانند که با فرض تیموشنکو و سایر مدل‌های تیرچه استفاده شده در نظریه تیموشنکو در تضاد است [۲۷].

برای بررسی تغییرات شیب پس کمانش  $S$  با  $w/L$ ، ابتدا دو پارامتر تعیین‌کننده  $S$  در معادله ۲۸ یعنی  $F_2$  و  $\epsilon_2$  مورد بررسی قرار گرفت. مقادیر نرمال شده  $F_2/F_{cr}$  (شکل ۶a) و  $\epsilon_2/\epsilon_{cr}$  (شکل ۶b) برحسب تابعی از  $w/L$  و نسبت‌های مختلف  $\mu/K$  رسم شد و به این نتیجه رسید که با افزایش  $w/L$ ، هر دو پارامتر  $F_2$  و  $\epsilon_2$  بصورت یکنواخت از یک مقدار مثبت کاهش می‌یابند و در یک  $w/L$  خاص به صفر می‌رسند. اگر  $F_2 = 0$  و  $\epsilon_2$  یک مقدار مثبت باشد آنگاه علامت  $S$  از مثبت به منفی تغییر می‌کند ولی اگر  $F_2 = 0$  و  $\epsilon_2$  یک مقدار منفی باشد آنگاه علامت  $S$  از بی‌نهایت منفی به بی‌نهایت مثبت تغییر می‌کند.

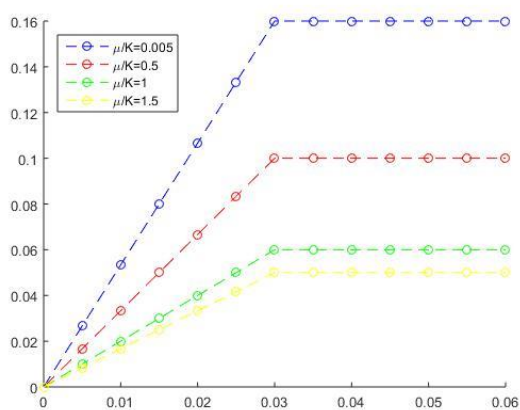


حالت کمانش از پیوسته به فروجهشی دارد. این اثر شدید  $\mu/K$  روی مسیرهای پس کمانش با افزایش  $w/L$  را می توان به وضوح در شکل های  $\lambda$ -b-d دید که در آنها شیب منحنی های  $F/w\mu$  در ناحیه پس کمانش تحت  $\mu/K$  مختلف در یک  $w/L$  پایین تقریباً با هم برابراند (شکل  $\lambda$ -b) در حالی که این شیبها در یک  $w/L$  بالا کاملاً با هم فرق دارند (شکل های  $\lambda$ -c-d)

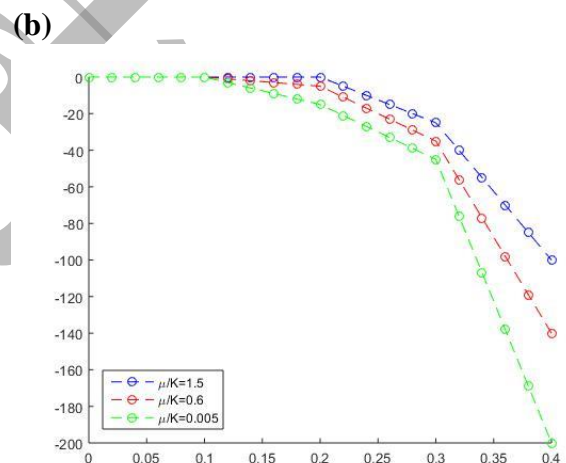
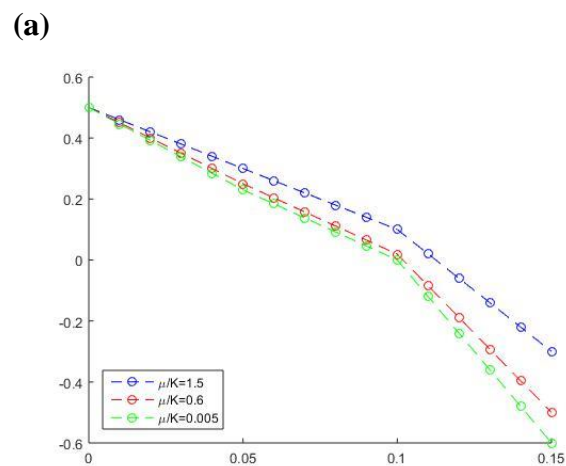
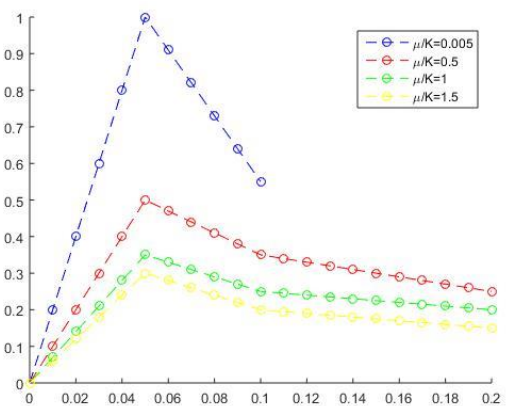
می کند که نشان دهنده تغییر حالت کمانش از فروجهشی به ارتجاعی است. این  $w/L = 0.238$  با نتایج عددی پیشین همخوانی دارد. هرگاه  $\mu/K$  بزرگتر است یعنی یک ماده تراکم پذیرتر داریم، علامت  $S$  دوبار تغییر می کند ولی  $w/L$  بحرانی برای تغییر حالت کمانش افزایش می یابد.



(b)  $w/L = 0.10$



(c)  $w/L = 0.24$



شکل ۷- شیب پس کمانش  $S$  بر حسب تابعی از نسبت عرض به طول  $w/L$  تحت نسبت های مختلف از مدول برشی به حجمی  $(\mu/K.a)$  نمای بزرگنمایی شده (b) در ناحیه ای علامت  $S$  از مثبت به منفی تغییر می کند.

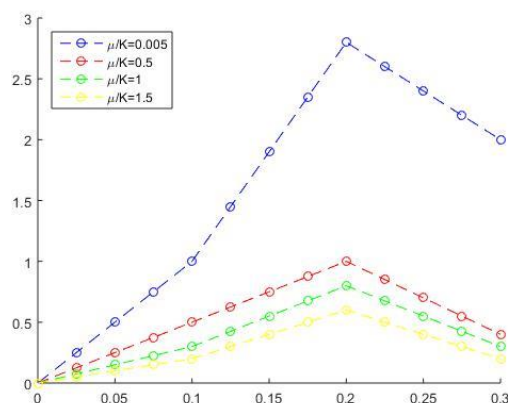
برای بررسی کامل تأثیر نسبت مدول برشی به حجمی  $\mu/K$  روی تغییر حالت های کمانش، یک نمودار فازی (شکل  $\lambda$ a) کشیده شد تا مرزهای بین سه حالت کمانش را در فضای  $w/L$ - $\mu/K$  نشان دهد. نتایج نشان داد که  $\mu/K$  می تواند تبدیل حالت کمانش از فروجهشی به ارتجاعی را به عقب بیندازد تا در یک  $w/L$  بالاتر رخ دهد ولی نسبت  $\mu/K$  تأثیر کمتری روی تغییر

طول و نسبت مدول برشی به حجمی نیز رسم شد. اگرچه آنالیز ما براساس یک ماده neo-Hookean خاص است (معادله ۴-۱) ولی سایر مدل‌های neo-Hookean نیز نتایج مشابهی دارد. چارچوب پیشنهاد شده در این مقاله را می‌توان برای قوانین ساختاری دیگر نیز استفاده کرد تا تأثیر انواع غیرخطی‌های ماده روی رفتار پس‌کمانش آن مشخص شود. این پژوهش اطلاعات جدیدی درباره کمانش ستون فراهم می‌کند و یافته‌های این مقاله می‌تواند برای طراحی فرامواد مکانیکی که برای کارکرد خود به کمانش ستون متکی هستند استفاده شوند.

#### ۵- منابع

- [۱] K. Bertoldi, V. Vitelli, J. Christensen, M. Van Hecke, Flexible mechanical metamaterials, *Nat. Rev. Mater.* 2 (2017) 1–11.
- [۲] K. Bertoldi, P.M. Reis, S. Willshaw, T. Mullin, Negative Poisson's ratio behavior induced by an elastic instability, *Adv. Mater.* 22 (2010) 361–366.
- [۳] B. Florijn, C. Coulais, M. van Hecke, Programmable mechanical metamaterials, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 175503.
- [۴] J.W. Boley, W.M. van Rees, C. Lissandrello, M.N. Horenstein, R.L. Truby, A. Kotikian, J.A. Lewis, L. Mahadevan, Shape-shifting structured lattices via multimaterial 4D printing, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 116 (2019) 20856–20862.
- [۵] C. Coulais, A. Sabbadini, F. Vink, M. van Hecke, Multi-step self-guided pathways for shape-changing metamaterials, *Nature.* 561 (2018) 512–515.
- [۶] L.A. Lubbers, M. van Hecke, C. Coulais, A nonlinear beam model to describe the postbuckling of wide neo-Hookean beams, *J. Mech. Phys. Solids.* 106 (2017) 191–206.
- [۷] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, Courier Corporation, 2009.
- [۸] M.A. Biot, Exact theory of buckling of a thick slab, *Appl. Sci. Res. Sect. A.* 12 (1963) 183–198.
- [۹] R. Ogden, D. Roxburgh, The effect of pre-stress on the vibration and stability of elastic plates, *Int. J. Eng. Sci.* 31 (1993) 1611–1639.
- [۱۰] W. Koiter, *Elastic Stability of Solids and Structures*, Cambridge university press, Cambridge, 2009.
- [۱۱] Y. Cao, J.W. Hutchinson, From wrinkles to creases in elastomers: the instability and

#### (d) $w/L = 0.34$



شکل ۸- تأثیر نسبت  $\mu/K$  روی تغییر حالت‌های کمانش. نمودار (a) نمودار فازی حالت‌های کمانش برحسب نسبت  $\mu/K$  و  $w/L$ . خطوط سیاه رنگ بیانگر مرزهای بین حالت‌های کمانش هستند، (b-d) منحنی‌های نرمال شده نیرو-کرنش  $F/w\mu\epsilon$  تحت  $\mu/K$  مختلف که از آنالیز مجانبی در شرایط زیر بدست آمده‌اند: (b)  $w/L = 0.1$  و (c)  $w/L = 0.24$

#### (d) $w/L = 0.34$

#### ۴- نتیجه‌گیری

کمانش ستون‌های صاف تحت فشار محوری بطور گسترده برای چندین دهه مطالعه شده است. اگرچه رفتار کمانش ستون‌های لاغر بخوبی پیش‌بینی شده است ولی رفتار پس‌کمانش ستون‌های عریض با نسبت‌های عرض به طول بالا (که در آنها غیرخطی هندسی و ماده حیاتی می‌شود) بررسی نشده است. این مقاله، بصورت تحلیلی نشان می‌دهد که برای یک ستون هایپرالاستیک صاف، افزایش نسبت عرض به طول آن می‌تواند حالت کمانش آن را از کمانش پیوسته به فروجهشی و ارتجاعی تغییر دهد. برهمین اساس، علامت شیب اولیه پس‌کمانش نیز از مثبت به منفی تغییر می‌کند و نهایتاً مجدداً مثبت می‌شود. ما با استفاده از یک آنالیز مجانبی براساس مکانیک محیط‌های پیوسته توانستیم شیب اولیه پس‌کمانش را برحسب تابعی از نسبت عرض به طول ستون تعیین کنیم و سپس نسبت‌های عرض به طول بحرانی برای تغییر حالت‌های کمانش را مشخص کنیم که این نتایج بخوبی با نتایج شبیه‌سازی FEA مطابقت داشت. هم‌چنین با افزایش نسبت مدول برشی به حجمی که بیانگر تراکم‌پذیری ماده است، تغییر حالت کمانش از کمانش فروجهشی به ارتجاعی به یک نسبت عرض به طول بالاتر می‌رود. یک نمودار فازی حالت‌های کمانش برحسب نسبت عرض به

[٢٦] E. Reissner, On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory, *Stud. Appl. Math.* 52 (1973) 87–95.

[٢٧] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, Courier Corporation, 2009.

imperfection-sensitivity of wrinkling, *Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.* 468 (2012) 94–115.

[١٢] H.-H. Dai, Y. Wang, F.-F. Wang, Primary and secondary bifurcations of a compressible hyperelastic layer: Asymptotic model equations and solutions, *Int. J. Non-Linear Mech.* 52 (2013) 58–72.

[١٣] H.-H. Dai, F.-F. Wang, J. Wang, J. Xu, Pitchfork and octopus bifurcations in a hyperelastic tube subjected to compression: Analytical post-bifurcation solutions and imperfection sensitivity, *Math. Mech. Solids*. 20 (2015) 25–52.

[١٤] A.A. Almet, H.M. Byrne, P.K. Maini, D.E. Moulton, Post-buckling behaviour of a growing elastic rod, *J. Math. Biol.* 78 (2019) 777–814.

[١٥] N. Triantafyllidis, W. Scherzinger, H.-J. Huang, Post-bifurcation equilibria in the planestrain test of a hyperelastic rectangular block, *Int. J. Solids Struct.* 44 (2007) 3700–3719.

[١٦] L.A. Lubbers, M. van Hecke, C. Coulais, A nonlinear beam model to describe the postbuckling of wide neo-Hookean beams, *J. Mech. Phys. Solids*. 106 (2017) 191–206.

[١٧] E. Hohlfeld, L. Mahadevan, Unfolding the sulcus, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 105702.

[١٨] W. Hong, X. Zhao, Z. Suo, Formation of creases on the surfaces of elastomers and gels, *Appl. Phys. Lett.* 95 (2009) 111901.

[١٩] Z.P. Bažant, L. Cedolin, *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*, World Scientific ed, World Scientific Pub, Hackensack, NJ ; London, 2010..

[٢٠] D. Roxburgh, R. Ogden, Stability and vibration of pre-stressed compressible elastic plates, *Int. J. Eng. Sci.* 32 (1994) 427–454.

[٢١] W. Koiter, *Elastic Stability of Solids and Structures*, Cambridge university press, Cambridge, 2009.

[٢٢] O. Mesa, S. Norman, *Non-Linear Matters: Auxetic Surfaces*, (2017) 13.

[٢٣] W. Hong, X. Zhao, Z. Suo, Formation of creases on the surfaces of elastomers and gels, *Appl. Phys. Lett.* 95 (2009) 111901.

[٢٤] W. Hong, F. Gao, Crease instability on the surface of a solid, in: *Mech. Self-Assem.*, Springer, 2013: pp. 111–130.

[٢٥] A. Humer, Exact solutions for the buckling and postbuckling of shear-deformable beams, *Acta Mech.* 224 (2013) 1493–1525.