بررسی اثر مدل ناهمگنی ساختاری بر ظرفیت کمانشی تیرهای مدرج تابعی متخلخل جدار نازک I شکل و ناودانی

رضا جهانگیری	نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیگ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس. ایمیل(R_Jahangiri2004@tabrizu.ac.ir)
رسول قنبری	کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
میکائیل ناصری	استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس
اكبر اللهوردى زاده	استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
ايرج شاكرى	کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس

چکیدہ

مدلسازی و پیش بینی مشخصات سازه ای تیر و ستون های جدار نازک به علت احتمال بروز کمانش جانبی در آن ها تحت بارهای جانبی خارج مرکز، متمرکز و توزیع شده از اهمیت زیادی برخوردار است. در مقاله حاضر، با لحاظ کردن اثرات اعوجاج، ناهمگنی، تخلخل و بر اساس فرضیات ولاسوف و بکارگیری اصل همیلتون، معادلات مشخصه حاکم بر کمانش جانبی تیرهای مدرج تابعی متخلخل جدار نازک I شکل و ناودانی چند لایه معرفی شدند. با اعمال روش المان محدود و توصیف مولفه های جابجائی نقاط داخل المان ها بر حسب توابع درونیابی لاگرانژی و هرمیتی معادله مقدار ویژه حاکم بصورت عددی حل شد. برای اعتبار سنجی نتایج تحقیق حاضر با مرجع دیگر مقایسه گردید. تاثیر پارامترهای مختلف بویژه شاخصهای تخلخل، اختلاط، نسبت مدول مواد، نسبت لنگرهای انتهائی و پارامتر مقاومت مقطع روی ظرفیت باربری تیرهای جدار نازک چند لایه تحت شرایط مرزی چندگانه بررسی گردید. نشان داده شد که پارامترهای مختلف نقش مهمی در تعیین محدودهٔ ناپایداری کمانش دارند.

كلمات كليدى: فرضيات ولاسوف، تير مدرج تابعي متخلخل، كمانش جانبي، شاخص تخلخل، شاخص اختلاط

Investigating the Effect of Structural Heterogeneity Model on the Buckling Capacity of Thin-Walled Porous Functionally Graded I-Beams and Channel Beams

Reza Jahangiri	Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Salmas branch
Rasoul Ghanbari	Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
Mikhail Naseri	Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Salmas branch
Akbar Allahverdizadeh	Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
Iraj Shakeri	Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Salmas branch

Abstract

The modeling and prediction of the structural characteristics of thin-walled beams and columns are of significant importance due to the potential occurrence of lateral buckling under eccentric, concentrated, and distributed lateral loads. In the present study, by incorporating the effects of warping, heterogeneity, porosity, and based on Vlasov's assumptions and the application of Hamilton's principle, the governing characteristic equations for the lateral buckling of multi-layered thin-walled porous functionally graded I-beams and channel beams were introduced. Using the finite element method and describing the displacement components of points within the elements in terms of Lagrangian and Hermitian interpolation functions, the governing eigenvalue equation was solved numerically. To validate the results of this study, they were compared with other references. The effect of various parameters, particularly porosity index, mixing index, material modulus ratio, end-moment ratio, and cross-sectional strength parameter, on the loadbearing capacity of multilayer thin-walled beams under multiple boundary conditions was investigated. It was demonstrated that various parameters have an important role in determining the range of buckling instability.

Keywords: Vlasov's Assumptions, Functionally Graded Porous Beam, Lateral Buckling, Volume Fraction Index, Porosity Index.

صنايع نورد فولادي، وقتى در مواجهه با شارهاي حرارتی با دماهای بالای عملکردی واقع میگردند، به علت تفاوت ویژگی های ترموفیزیکی موجود در آن ها دچار گسیختگی، تورق و جدایش می شوند. حال آنکه می توان با استفاده از تکنولوژی مواد نوظهور FGM بر این مشکل ها غلبه کرد. از مزایای بر جسته FGM می توان به عملک د آنها به عنوان عایق حرارتی در برابر دماهای بالا اشاره کرد. این مواد با افزایش استحکام کششی و کاهش تمرکز تنشها، کارایی بیشتری از خود نشان میدهند و در نتیجه احتمال شکست مواد کاهش می یابد[۳]. تفاوت اصلی FGM با کامیوزیتهای سنتی در این است که این مواد از بروز ترک، لایهلایه شدن و تمركز تنش جلوگيري ميكنند زيرا فاقد مرز داخلي هستند. چندین روش برای ساخت این مواد وجود دارد از جمله متالورژی پودری [۴]، رسوب بخار، نفوذ چند مرحلهای، یکیارچهسازی بدون فشار و سنتز خودتکثیری در دماهای بالا[۵]. با این حال، در فرآیند تولید مواد

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی (FGM) در سال ۱۹۸۴ توسط آزمایشگاه ملی هوافضای ژاپن معرفی شدند. این مواد به گونهای طراحی شدهاند که ترکیب آنها بهصورت پیوسته به ویژه در امتداد ضخامت، تغییر کند[۱]. این مواد که معمولا از ترکیب سرامیک و فلز ساخته می شوند؛ خواصی پیوسته و متغیر در امتداد ضخامت دارند که سبب افزایش مقاومت در برابر تنشهای مکانیکی و حرارتی و لرزش می شود[۲]. تحقیقات نشان می دهد که این تیرها عملکرد بهتری در کنترل تغییر شکل و توزیع تنش دارند. در صنایع هوافضا و مهندسی عمران این مواد شناخته شدهاند. علاوه بر اینها هنگامیکه تیرها، ستونها شناخته شدهاند. علاوه بر اینها هنگامیکه تیرها، ستونها یا تیر-ستونها چند لایه ای بکار رفته در کورههای گرمائی یا حرارتی و یا اجزاء پوشش بدنه سازهای

مدرج تابعی ممکن است به دلیل چالشهای فنی، تخلخل و ریز منفذها درون ماده ایجاد شود. در روش نفوذ چند مرحلهای، نفوذ مواد ثانویه به لایههای میانی دشوارتر است در حالی که نفوذ به لایههای بالایی و پایینی آسانتر انجام میشود. در نتیجه، تخلخل عمدتا پایینی آسانتر انجام میشود. در نتیجه، تخلخل عمدتا روشهای تولید این مواد شامل شکل دهی با لیزر[۶]، روش پودر مخلوط شده با گریز از مرکز[۷] و روشهای نمونهسازی سریع و تولید تطبیقی هستند [۸].

Kahya و Turan در سال ۲۰۱۷ مدلی از المان محدود برای تحلیل ارتعاش و کمانش تیرهای FGM بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه دادند. آنها به بررسی ارتعاش و پایداری تیرهای FGM با استفاده از روش المان محدود پرداختند و نتایج نشان داد که افزایش نسبت طول به ضخامت تیر تأثیر زیادی بر رفتار ارتعاشی و کمانش تیر دارد. این مطالعه راهکارهای مفیدی برای طراحی این نوع تیرها ارائه داد[۹]. تونسی و همکارانش در سال ۲۰۱۷ پاسخ کمانش حرارتی تیرهای FGM در محیط حرارتی را تحلیل کردند. با استفاده از روش عددی نشان دادند که رفتار حرارتی مواد مدرج تابعی در دماهای بالا میتواند بر پایداری تیرها تأثیر بگذارد. افزایش دمای محیط منجر به کاهش بار بحرانی کمانش می شود[۱۰]. Kahya و Turan در سال ۲۰۱۸ تحلیل ارتعاش و پایداری تیرهای ساندویچی FGM با استفاده از روش المان محدود چندلایه را ادامه

دادند. این مطالعه بر روی تیرهای ساندویچی FGM تحت بارگذاری های مختلف و شرایط مرزی گوناگون تمرکز داشت و نشان داد که استفاده از مواد مدرج تابعی در لایههای مختلف می تواند منجر به بهبود رفتار مکانیکی تیرها شود[۱۱]. Avcar در سال ۲۰۱۸ به بررسی ارتعاش آزاد تیرهای FGM بر روی پایههای الاستيک وينکلر-پاسترناک پرداخت. او نشان داد که پایههای الاستیک نقش مهمی در کنترل ارتعاشات تیرها دارند و استفاده از پایههای مناسب می تواند بهبود قابل توجهی در عملکرد مکانیکی تیرهای FGM ایجاد کند[۱۲]. Vo-Duy و همکارانش در سال ۲۰۱۹ به تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای تقویت شده با نانولولههای کربنی FGM پرداختند. آنها به بررسی رفتار دینامیکی این تیرها پرداختند و نشان دادند که تقویت نانولولههای كربني مي تواند به شكل قابل توجهي خواص مكانيكي تیرها را بهبود بخشد، به ویژه در شرایطی که بارگذاریهای دینامیکی سنگین اعمال میشود[۱۳]. Avcar در سال ۲۰۱۹ مطالعهای بر روی ارتعاش آزاد تیرهای FGM با نقص های سیگموئید و قانون توانی انجام داد. او نشان داد که نقصها در مواد تابعی می تواند تأثیر زیادی بر رفتار ارتعاشی تیرها داشته باشد و نیاز به طراحي دقيق تر براي جبران اين نقصها وجود دارد[۱۴]. AlSaid-Alwan و Avcar در سال ۲۰۲۰ تحلیل مقایسهای ارتعاش آزاد تیرهای FGM را با استفاده از نظریههای مختلف تیر انجام دادند. این مقاله به بررسی

و مقایسه نظریههای مختلف برای تحلیل ارتعاش آزاد تيرها پرداخت و نتايج آن نشان داد كه انتخاب مدل مناسب می تواند به شکل قابل توجهی بر دقت تحلیل ها تأثير بگذارد[10]. بابايي و همكاران كمانش حرارتي صفحات FGM را بررسی کرد. نشان دادند که بارهای حرارتی میتوانند منجر به ناپایداری در صفحات مدرج تابعی شوند و نیاز به تقویت ساختاری برای مقابله با این نوع بارگذاریها وجود دارد[۱۶]. در سال ۲۰۲۱، Youzera و همکارانش به بررسی اثرات کویلینگ محوری و خمشی بر پاسخ ارتعاش آزاد تیرهای FGM در محیطهای حرارتی پرداختند. آنها نشان دادند که این اثرات میتواند به طور قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی تيرها در شرايط حرارتي تأثير بگذارد و طراحي دقيق تري برای این تیرها نیاز است[۱۷]. با بکارگیری روش المان محدود، Wang و همکارانش در سال ۲۰۲۳ در تحقیقات خود روی رفتار شناسی مواد مدرج تابعی با مدلسازی دقیق عیووب ساختاری داخلی به بررسی ارتعاشات و رفتار کمانش تیرهای FGM پرداختند. نتایج آنها نشان داد که نقصهای داخلی تأثیر قابل توجهی بر روی پاسخ ديناميكي و كمانش اين تيرها دارد و نياز به توجه بیشتری در طراحی سازههای FGM وجود دارد[۱۸]. در سال Xie ۲۰۲۴ و همکاران به بررسی رفتار کمانش و پایداری تیرهای جدار نازک ساخته شده از مواد مدرج تابعی FGM تحت بارگذاری محوری پرداختند. نتایج نشان داد که انتخاب صحیح مواد و طراحی ساختاری

می تواند مقاومت تیرها را در برابر ناپایداری و کمانش بهبود بخشد و در عین حال وزن سازه را کاهش دهد[۱۹].

در این مقاله، با در نظر گرفتن اثر تخلخل و اثر ناهمگنی ساختاری خواص مواد با اعمال قانون اختلاط خطی توانی و با بکارگیری اصل همیلتون، معادلات مشخصه توصيف کننده تعادل استاتيکي تير در معرض بارهای جانبی، با توزیعهای متفاوت نیروئی استخراج گردید و بار بحرانی کمانش مربوط به تیر ساندویچی (چند لایه) شکل هدفمند تابعی جدار نازک در مواجهه با بارگذاریهای متمرکز/گسترده نیرویی و لنگری برای چند حالت متنوع از نحوه توزیع مواد در راستای ضخامت استخراج گردید. در ادامه نتایج عددی حاصل از حل معادله مشخصه حاکم بر ناپایداری استاتیکی مساله، با نتایج سایر مراجع مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته است. نخست متناظر با انعکاس اثرات مولفه های تغییر مکان محوری و جانبی مرکز جرم، مرکز برش مقطع عرضی، زاویه چرخش مقطع و مولفههای تغییر مکان درون صفحهای نقاط داخل تیر و برای چند حالت مختلف از ناهمگنی ساختاری چند لایه ای و نحوه بار گذاری جانبی تیر، معادلات حاکم بر تعادل استاتیکی تیر معرفی گردید. سپس با اعمال متد المان محدود و بهره گیری از نرم افزار متلب مساله مقدار ویژه مشخصه مربوط به کمانش جانبی تیر با دقت کافی حل گردید. نمودارها و منحني هاي مشخصه مد نظر ترسيم و تجزيه

تحلیل روی نتایج حاصل بصورت کامل انجام شده و تاثیر تغییرات پارامترهای مختلف اعم از نسبت ابعاد تیر، شاخص تخلخل، شاخص اختلاط مواد تابعی متناظر با: الف) مقطع ناودانی شکل و ب) مقطع I شکل با بال های نامساوی، مورد بررسی قرار گرفت.

> ۲- مواد و روش ها ۲-۱- مدل سازی :

تیری به طول L با ساختار ناهمگن دو فازه مدرج تابعی FG دربرگیرنده دو هندسه متفاوت عرضی نشان داده شده در شکل های ۱ و ۲ را که بخش های بال و جان آنها از اختلاط دو جزء فلزی و سرامیکی ساخته شده را در نظر می گیریم. شکل ۱ نشان دهنده نحوه



تغییرات خواص مصالح داخل لایه تابعی متخلخل نوع A است فرض میشود که توزیع خواص ماده در امتداد اعضاء مقطع از قانون ترکیب خطی کسر حجمی مواد پیروی کرده و از رابطه ۱ بدست میآیند:

$$P_{FG} = P_c V_c(n) + P_m V_m(n) \tag{1}$$

که اینجا P_c و P_m بترتیب خواص خالص فلزی و سرامیکی میباشند. $V_c \ W_c$ نیز نشان دهنده کسر حجمی جزءهای سرامیکی و فلزی میباشند، طوریکه داریم: $V_c(n)+V_m(n)=1$ (۲)

در نتیجه می توان وابستگی مدول یانگ و نسبت پواسون لایههای متخلخل مقطع را در راستای ضخامت بر حسب

کسر حجمی اجزاء را بصورت زیر توصیف کرد: $E(n)=E_{m} + (E_{c}-E_{m})V_{c}(n)-\lambda(E_{c}+E_{m})/2 \quad (٣)$ $v(n)=v_{m} + (v_{c}-v_{m})V_{c}(n)-\lambda(v_{c}+v_{m})/2 \quad (ᠻ)$

که در روابط ۳و۴، h پارامتر تخلخل متناظر با مدل تخلخل زوج است. در این مقاله توزیع تک جهته خواص ماده در امتداد ضخامت لایه ها را بصورت سه مدل زیر تقسیم بندی می کنیم: α_1h_1 α_2h_2 α_2h_2 α_2h_2 α_2h_2 α_2h_2

شکل ۲ : مقطع عرضی تیر I شکل با بال های نامساوی

نوعA

بر اساس این مدل فرض می شود که مطابق شکل ۳،

خالص فلزی در
$$n = -h/2$$
 به خالص سرامیکی در
 $V_c(n)$ به خالص سرامیکی در
 $n = (0.5 - \alpha)h$
داخل لایه های مدل نوع **B** بصورت زیر بیان می شود:
 $V_c = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{h}\right)^p, -0.5h \le n \le (0.5 - \alpha)h \\ 1 & (0.5 - \alpha)h \le n \le 0.5h \end{cases}$
(V)

که با انتگرال گیری از رابطه تنش-کرنش حاکم در راستای ضخامت می توان مولفه های سختی کششی، سختی پیوندی کششی-خمشی و سختی خمشی متناظر با مدل B را از روابط ۸ تعیین کرد:

$$A_{11} = \alpha h E_{c} + \frac{E_{c} + p E_{m}}{p+1} (1-\alpha) h$$

$$B_{11} = \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1-\alpha}{(p+2)}\right] \times (E_{c} - E_{m})(1-\alpha) h^{2}$$

$$D_{11} = \left[\frac{1}{24} + \frac{(1-\alpha-0.5)^{3}}{3}\right] E_{c} h^{3} \qquad (\Lambda)$$

$$- \frac{1}{12} (4\alpha^{3} - 6\alpha^{2} + 3\alpha - 1) E_{m} h^{3} + \left[\frac{1}{4(p+1)} - \frac{1-\alpha}{p+2} + \frac{(1-\alpha)^{3}}{p+3}\right] \times (E_{c} - E_{m})(1-\alpha) h^{3} \qquad (I - \alpha) h \int_{a}^{b} \frac{e^{\alpha}}{r} \frac{r}{r} GM \qquad x$$

$$B e^{\alpha} h \int_{a}^{b} \frac{r}{r} \frac{r}{r} GM \qquad x$$

نوعC

مطابق این مدل که در شکل ۵ نشان داده شده است فرض می شود که لایه میانی یا هسته مقطع از جنس خالص سرامیکی بوده که ضخامت آن برابر αh در نظر گرفته می شود، حال آنکه لایه های تحتانی و فوقانی

خواص مصالح در راستای ضخامت از خواص خالص فلزی در n = -h/2 به خواص خالص سرامیکی در n = +h/2 بر اساس توزيع توانی تغيير میکند. Ceramic hFGM r Metal شكل ٣: ساختار ناهمگن نوع A مي توان كسر حجمي فاز سراميكي بصورت رابطه ٥ تعريف كرد: $V_{c} = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{h}\right)^{r}, -\frac{h}{2} \le n \le +$ (۵) اینجا، شاخص توانی P یک عدد غیرمنفی است که توصيف كننده نحوه توزيع كسر حجمي تركيب مواد در امتداد ضخامت لایه تابعی را توصیف میکند. که بر این اساس، میتوان مولفه های سختی کششی A_{II}، سختی پیوندی کششی- خمشی B₁₁ و سختی خمشی D₁₁ را با انتگرال گیری از رابطه تنش-کرنش در راستای ضخامت، بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{split} A_{11} &= \left(\frac{E_{c} - E_{m}}{p + 1} + E_{m}\right) h \\ B_{11} &= \frac{p(E_{c} - E_{m})}{2(p + 1)(p + 2)} h^{2} \\ D_{11} &= \left[\frac{1}{4(p + 1)} - \frac{1}{p + 2} + \frac{1}{p + 3}\right] (E_{c} - E_{m}) h^{3} \\ &+ \frac{E_{m}}{12} h^{3} \end{split}$$

$$(5)$$

نوعB

با توجه به شکل ۴ فرض میکنیم که لایه بالائی مقطع از جنس خالص سرامیکی بوده و ضخامت آن αh است. اما در سطح روئین لایه تحتانی، خواص ماده از

ماهیت مدرج تابعی داشته و خواص مصالح در این لایه ها از بترتیب از سطوح زیرین و روئین مربوطه به سمت هسته از خواص خالص فلزی به خوا خالص سرامیکی



بین رفته و منتجه تنش B₁₁ صفر میگردد. علاوه بر این بعلت ایزوتروپیک بودن خواص مصالح در لایه های

همگن و تابعی در هر سه مدل مفروض، D₆₆=D₁₁ / 2(1+v) نشان دهنده منتجه خمش است. ۲-۲- روابط حاکم

از آنجائیکه ارائه یک راه حل صریح و تحلیلی برای معادلات حاکم بر کمانش از پیچیدگی خاصی برخوردار است. از اینرو روش عددی المان محدود برای حل معادلات حاکم بر مساله کمانش تیر مفروض بکار گرفته شد. لذا برای دستیابی به این هدف تیر مفروض در امتداد طولی و در فواص یکسان گره گذاری و به المان های یکسان تقسیم شد. بنحویکه با دخالت دادن اثر وارپینگ یا اعوجاج مطابق شکل ۶ هر کدام از این المان ها دارای هفت درجه آزادی می باشند.

 v_1 v_2 v_2

$$\begin{aligned} & \text{Horizondal} \quad \text{Hori$$

وG نيز بترتيب ماتريس سختي المان و ماتريس سختي

هندسی بوده که بصورت ر.ابط ۱۷ و ۱۸ داده می شوند:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}^{11}]_{[2\times2]} & [\mathbf{K}_{12}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{K}_{13}^{13}]_{[2\times4]} & [\mathbf{K}_{13}^{13}]_{[2\times4]} \\ \vdots & [\mathbf{K}_{21}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{K}_{13}^{12}]_{[2\times4]} \\ \vdots & [\mathbf{K}_{21}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{K}_{12}^{13}]_{[2\times4]} \\ \vdots & [\mathbf{G}_{22}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{O}_{12\times4]} & [\mathbf{G}_{24}^{13}]_{[2\times4]} \\ \vdots & [\mathbf{G}_{22}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{O}_{12\times4]} & [\mathbf{G}_{24}^{14}]_{[2\times4]} \\ \vdots & [\mathbf{G}_{22}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{O}_{12\times4]} & [\mathbf{G}_{24}^{14}]_{[2\times4]} \\ \vdots & [\mathbf{G}_{22}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{O}_{12\times4]} & [\mathbf{G}_{24}^{14}]_{[2\times4]} \end{bmatrix} \\ \text{(1A)} \\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{[2\times2]} & [\mathbf{0}]_{[2\times4]} & [\mathbf{0}]_{[2\times4]} & [\mathbf{0}]_{[2\times4]} \\ \vdots & [\mathbf{G}_{22}^{12}]_{[2\times4]} & [\mathbf{G}_{24}^{14}]_{[2\times4]} \end{bmatrix} \\ \text{(1A)} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c}$$

$$\Psi_{1}(z) = 1 - z/l_{e}$$

$$\Psi_{2}(z) = z/l_{e}$$

$$\Psi_{1}(z) = 2z^{3} / l_{e}^{3} - 3z^{2} / l_{e}^{2} + 1$$

$$\Psi_{2}(z) = z^{3} / l_{e}^{2} - 2z^{2} / l_{e} + z$$

$$\Psi_{3}(z) = -2z^{3} / l_{e}^{3} + 3z^{2} / l_{e}^{2}$$

$$\Psi_{4}(z) = z^{3} / l_{e}^{2} - z^{2} / l_{e}$$
(17)

در ادمه این تحقیق با پرهیز از پرداختن به جزئیات نحوه استخراج معادله انتگرالی مستخرج از اصل همیلتون، می توان با استفاده از عبارات ۱۲و ۱۳ این معادله

در ادامه با متحد صفر قرار دادن ضرایب کمیت های مستقل δu_i ، δv_i ، δu_i می توان فرم تعمیم یافته حاکم بر مساله کمانش هر کدام از المانهای مدلسازی شده بروش المان محدود را در فرم ماتریسی خود بصورت رابطه ۱۵ باز نویسی کرد: (K - $\lambda^* G$) $\Delta = 0$

$$\boldsymbol{\Delta} = \left\{ w_1, w_2, u_1, u_1', u_2, u_2', v_1, v_1' \\ v_2, v_2', \phi_1, \phi_1', \phi_2, \phi_2' \right\}^T$$
(19)

∆بردار ویژه در برگیرنده جابجائیهای گرهی متناظر با مقدار ویژه (پارامتر بار کمانشی) برای ^{*}λ میباشند. к حاصل از مدل حاضر و مرجع [۲۰] وجود دارد. پیداست که با افزایش شاخص توانی (کاهش جزء سرامیکی)، پارامتر مشخصه بصورت پیوسته تا رسیدن به مقدار اکسترمم مربوطه با شیب قابل ملاحظه ای افزایش و سپس با ادامه افزایش شاخص توانی پارامتر تا تثبیت شدن روی مقادیر ثابتی با شیب بسیار ملایمی تغییر می-شدن روی مقادیر ثابتی با شیب بسیار ملایمی تغییر می-شدن روی مقادیر ثابتی با شیب بسیار ملایمی تغییر می-شدن روی مقادیر ثابتی با شیب بسیار ملایمی تغییر می-شدن روی مقادیر ثابتی با شیب بسیار ملایمی تغییر می-شدن روی مقادیر ثابتی با شیب بسیار ملایمی تغییر می-شدن روی مقادیر ثابتی با شیب بسیار ملایمی تغییر می-کند. از طرف دیگر مطابق این شکل ظرفیت کمانش جانبی تیر علاوه بر وابستگی به مدل توزیع خواص، به منگل هندسی مقطع عرضی نیز شدیدا وابسته می ماشد، بنحویکه با افزایش درجه تیر از 5.0= α به 1= α (متناظر با مقطع T شکل شدن مقطع)، افزایش سختی سبب افزایش ظرفیت باربری جانبی می گردد.



بعنوان مثال اول، دو تیر جدار نازک با مقاطع عرضی I شکل با یک محور تقارن و ناودانی با شرایط مرزی چندگانه و هندسه های مقطع عرضی آورده شده در شکل ۸ را در نظر میگیریم.

ب) برای تیر تحت بار گسترده با توزیع یکنواخت:

$$f(z) = L^2 / 8 - z^2 / 2$$
 $g(z) = 1$
(۲۲)

ركزى:	ی متمرکز م	ِ تحت بارگذار	ج) برای تیر
f(z) = (L/z)	4 - z / 2)		
$a(z) = \int 0,$	$z \neq L/2$		(77)
g(z) = 1	z = L / 2		

۳-۲- اعتبار سنجی مدل عددی

به منظور بررسی صحت و اعتبار نتایج عددی مستخرج از فرمولبندی ارائه شده در این تحقیق، نتایج حاصله با نتایج حاصل از تجقیق نگوین و همکارانش [۲۰]، مورد مقایسه کمی واقع شد. برای این منظور همانند این مرجع و تحت شرایط خاصی مساله کمانش تیرهای دارای دو محور تقارن با خواص ایزوتروپیک و متناظر با مقادیر $E_c = 17.225$ GPa و v = 0.3 مورد آنالیز عددی قرار گرفت. برای صحت سنجی نتایج حاصل از پژوهش اخیر، در شکل ۷ منحنی تغییرات پارامتر مشخصه مقاومت کمانش جانبی- پیچشی تیر I شکل که تابعی از صلبیت خمشی و صلبیت پیچشی است در برابر شاخص توانی، برای سه مقدار مختلف از پارامتر بدون بعد درجه تير $p = b_1 / b_1 + b_2$ ارائه شد و بصورت کمی با نتایج مستخرج از مرجع [۲۰]، مورد مقایسه قرار گرفته است. همانند این مرجع، مشاهده می شود که خواص تیر در راستای ضخامت لایه ها از مدل توزیع خواص نوع B تبعيت مي كند. مطابق اين شكل مشاهده می شود که شکل سازگاری بسیار مطلوبی بین نتایج



شکل ۸ : هندسه مقطع عرضی تیر I و ناودانی

این مقاطع میباشد. علاوه بر این مگر اینکه در جائی اشاره شود، پارامتر نسبت ابعاد طول به ارتفاع تیر را نیز برابر L/b₃=40 در نظر می گیریم. مطابق شکل۸ ساختار ظاهری مقطع عرضی تیر هدفمند تابعی با هندسه I شکل، که نشان دهنده ساختار هندسی و نحوه چینش لایه های همگن و تابعی است.

۴–۲- نتایج عددی ۱–۴–۲– بررسی تاثیر نسبت ضخامت سرامیکی روی ظرفیت کمانش تیر I شکل

ابتدا مساله کمانش تیرهای جدار نازک باز با مقاطع عرضی I شکل دارای یک محور تقارن، در معرض لنگر انتهائی را تجزیه و تحلیل میکنیم. ضمنا مگر اینکه در جائی ذکر شود، فرض میکنیم که پارامترهای نسبت ضخامت سرامیکی بالها و پارامتر نسبت ضخامت سرامیکی هسته جان روی مقاطع عرضی برابر میباشند ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$).

در شکل ۹ تغییرات نیروی محوری بحرانی متناظر

مشخصات هندسی سطح با مقطع I شکل بصورت $h_1 = h_2 = h_3 = h = 5$ $b_3 = 2b_1 = 4b_2 = 40h$ مشخصات هندسي سطح مقطع ناوداني شكل $h_1 = h_2 = h_3 = h = 5$ $b_3 = 2b_1 = 2b_2 = 40h$ است. علاوه بر این فرض میشود که مقاطع عرضی اعضاء مقطع تک لایه، دولایه و یا سه لایه می باشند بنحویکه در لایه تابعی آنها، خواص ماده بصورت تدريجی از جزء سرامیکی با E_c = 380 GPa به جزء فلزی با E_m = 70 GPa متغیر است. علاوه بر این برای یرهیز از پیچیدگیهای مفرط در محاسبات انتگرالی، نسبت پواسن اجزاء فلزی و سرامیکی را برابر ۷=۵ $lpha_2$ در نظر می گیریم. همچنین، فرض می کنیم که \mathfrak{a}_1 و بترتيب بيانگر نسبت ضخامت لايەھاي خالص سراميكي فوقاني و تحتاني به ضخامت لايه تابعي روى اعضاء بال مقاطع I شکل و ناودانی می باشند. ضمنا مطابق این شکل ها فرض می کنیم که α_3 نشان دهنده نسبت ضخامت لايه خالص سراميكي به ضخامت لايه تابعي

متناظر با شش مقدار صعودی از پارامتر نسبت ضخامت لایه سرامیکی Ω ، نمایش داده شده است. مطابق این شکل نیز بخوبی مشاهده می شود که برای هر مقدار خاصی از نسبت ضخامت سرامیکی Ω ، با افزایش شاخص \mathbf{p} ، ظرفیت بار کمانشی گسترده نیز در نتیجه کاهش سختی (ناشی از کاهش سهم اشتراک جزء سرامیکی)، تنزل پیدا می کند. علاوه بر این مطابق این شکل مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت، ظرفیت کمانشی تحت اعمال بار گسترده نیز ارتقاء می یابد زیرا بواسطه افزایش این نسبت سختی تیر نیز ارتقاء



کمانش عرضی تیر ناودانی

برای این منظور در شکل ۱۱ تغییرات لنگر بحرانی کمانش تیر با مقاطع عرضی ناودانی دولایه (مدل **B**) و سه لایه (مدل C) در برابر تغییرات شاخص *Φ* متناظر با چهار مقدار مختلف از نسبت ضخامت Ωبرای چهار مقدار مختلف از نسبت ضخامت Ωبرای

با بروز کمانش در برابر تغییرات شاخص اختلاط توانی *p* متناظر با شش مقدار صعودی از پارامتر نسبت ضخامت لایه سرامیکی α بتصویر کشیده شده است. مطابق این شکل پر واضح است که، به ازاء تمام مقادیر داده شده از این نسبت، با افزایش شاخص p، ظرفیت باربری کمانش نیروئی محوری به سبب کاهش سختی متاثر از کاهش سهم اشتراک جزء سرامیکی در ماده تابعی، کاهش پیدا میکند. بنحویکه برای تمامی مقادیر داده شده از نسبت ضخامت سرامیکی، با ادامه افزایش شاخص توانی، ظرفیت کمانش محوری روی مقادیر حدی خاص (وابسته به ۵) تثبیت می گردند. علاوه بر این مشاهده میشود که افزایش پارامتر نسبت ضخامت تاثیر پایدار ساز دارد زیرا سختی تیر نیز در نتیجه افزایش هر چه بیشتر این نسبت افزایش یافته و سبب می شود که کمانش محوری در مقادیر بالاتری از نیروی محوری متمركز وارده رخ بدهد.



بارگذاری گسترده در برابر شاخص توانی اختلاط p،

لنگرهای انتهائی برای شش مقدار مختلف از شاخص اختلاط توانی نشان داده شده است. با توجه به این شکلها به ازاء تمامی مقادیر از p، با افزایش نسبت لنگرهای انتهائی ظرفیت کمانشی لنگری در محدوده 0≥β≥1- ابتدا ظرفیت باربری کمانش جانبی لنگری با شيب زيادي افزايش يافته و در محدوده 1≥β≥0 بعد از گذر از نقطه اکسترمم منحنی های مربوطه در β≃0.8 با شیب ملایمی کاهش مییابد. شایان ذکر است که در محدوده های 0≥βو β≥0 بترتیب تیر با یک انحناء و دو انحناء خميده مي شود. مطابق اين شكل در محدوده تغییرات نسبت لنگرهای انتهائی (1≥β≥1-)، با ارتقاء شاخص توانی از p=0 (مربوط به منحنی سیاه رنگ متناظر با سرامیکی شدن جنس کل مقطع) به m=0 (مربوط به منحنی سبز کم رنگ متناظر با بزرگتر شدن سهم فلزي)، ظرفیت کمانشی مقاطع عرضی با مدلهای نوعB،A وC، بعلت كاهش سختي مقطع به سبب كاهش کسر حجمی سرامیکی کل کاهش می یابد.

برای مقایسه کمی اثر چگونگی توزیع ساختاری خواص لایههای همگن و تابعی مقطع عرضی روی ظرفیت کمانشی، درشکل ۱۲-ت نیز منحنیهای مشخصه ظرفیت کمانش جانبی-لنگری تیر ناودانی با مقطع عرضی، نوعA، نوع B و نوعC در برابر نسبت لنگرهای انتهائی برای مقدار خاص از شاخص توانی لنگرهای انتهائی برای مقدار خاص از شاخص توانی به ازاء تمامی مقادیر از نسبت لنگر انتهائی، تیر ناودانی با مقطع سه لایه ای نوعB دارای بیشترین ظرفیت است. مطابق شکل ۱۱ برای تمامی مقادیر Ω با افزایش شاخص توانی و به تبع آن کاهش اشتراک سهم جزء سرامیکی در جان و بال مقاطع، کمانش عرضی تیر ناودانی در مقادیر پائین تری از بارگذاری لنگری رخ میدهد. از طرف دیگر افزایش Ω در اعضاء مقطع، سبب ارتقاء سهم مشارکت فاز سرامیکی در تحمل بار لنگری وارده بر مقطع و متعاقبا سبب افزایش سختی کل تیر می گردد بدین معنی که کمانش در بارهای لنگری بزرگتر رخ میدهد. علاوه بر این با مقایسه آن منحنیهای مشخصه در شکل ۱۱ میتوان دریافت که برای تمامی مقادیر داده شده از q و Ω ، ظرفیت کمانشی تیر با مقطع سه لایه (مدل Ω) در مقایسه با مقطع دو لایه (مدل \mathbf{R})



دو لايه (مدلB) و سه لايه (مدلC) در برابر شاخص توانی.

۳-۴-۲ - تاثیر شاخص کسر حجمی اختلاط روی ظرفیت کمانش عرضی

در شکلهای ۱۲ نیز منحنیهای مشخصه تغییرات ظرفیت کمانش لنگری تیر ناودانی با مقاطع: الف) نوع A، ب)B نوع و ج) نوع C در برابر پارامتر نسبت

کمانش جانبی و مقطع عرضی نوعC دارای کمترین ظر فیت می ىاشىد. 35 $b_1 / h = 20$ $b_3 / h = 40$ Type 🖊 Type B •••••• p = 0 •••••• p = 0.5 $\bullet \cdots p = 0$ 35 $b_2 / h = 10 L / b_3$ p = 0.5•• p = 1 p = 130 $0 \cdots p = 2$ 30 25 [kN.m [m.N3 [kN.m] 20 **Z**⁵20 \mathbf{x}_{1}^{z} 10 15 $\alpha_n = \alpha_n = 0.5$ $b_1 / h = 20$ $b_3 / h = 40$ $b_2 / h = 10$ L / $b_3 = 40$ 10 -0.5 0 β 0.5 -0.5 0.5 -1 -1 β^0 (ب) (الف) 30 40 ••••• p = 0 ••••• p = 0.5 ••••• p = 1 ••••• p = 2 ••••• p = 5 Type (■---- Type A ◆--- Type B $b_1 / h = 20$ $b_3 / h = 40$ $b_2 / h = 10$ $L / b_3 = 40$ 28 35 - Type C 26 30 24 _ 24 E NN 22 [kN.m [kN.m \mathbf{v}^{520} **∑**⁵20 18 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.3$ 16. $b_1 / h = 20$ $b_3 / h = 40$ $b_1 / h = 10$ $L / b_2 = 40$ 14 ^L. -1 -0.5 0.5 β^0 -0.5 0 β 0.5 1 (ت) (پ)

شکل ۱۲: تغییرات بار لنگری کمانش عرضی در برابر نسبت لنگرهای انتهایی برای شش مقدار مختلف از شاخص توانی

۴-۴-۲ آنالیز اثرگذاری تغییرات پارامتر تخلخل روی ظرفیت کمانشی

در شکلهای ۱۳، منحنیهای مشخصه کمانش جانبی تیر **I** شکل در برابر شاخص توانی، بترتیب تحت بارگذاریهای گسترده، متمرکز و لنگری و متناظر با سه حالت مختلف از شرایط مرزی تکیه گاهی الف) دو سر ساده SS، ب) یکسر ساده-یکسر گیردار CS، ج) دو سر گیردار CC برای چهار مقدار مختلف از پارامتر تخلخل از $0=\kappa$ ، 20.0 $=\kappa$ ، 40.0 $=\kappa$ و 20.0 $=\kappa$

که با افزایش شاخص توانی از خواص سرامیکی (متناظر با p = 0) به خواص فلزی (متناظر با $\infty \leftarrow p$)، بار کمانش گسترده، متمرکز و لنگری تا تثبیت شدن روی مقادیر خاص مربوطه کاهش مییابند. مقایسه این شکل-ها نشان دهنده آن است مقایسه نتایج حاصله پیداست که با افزایش درجه قیود تکیه گاهی حاکم بر تیر از حالت SS به CC و به دنبال افزایش سختی خمشی تیر، ظرفیت کمانشی جانبی مقطع بطرز قابل ملاحظه ای بهبود مییابد. به بیان دیگر برای هر مقدار از شاخص توانی، ظرفیت کمانشی تیر CC بیشتر از دو حالت دیگر

است و ظرفیت باربری کمانشی تیر CS نیز در مقایسه با تیر SS بیشتر است. از طرف دیگر مطابق این شکل ها و همچنان که انتظار میرود در تمامی حالات افزایش پارامتر تخلخل از D=ل به 0.06=لاسبب کاهش



و لنگرى

ناهمگنی ساختاری: الف) مدلA، ب) مدلB، ج) مدل تو ناهمگنی ساختاری: الف) مدلA، ب) مدلB، ج) مدل C $C_{c}/E_{m} = 0.5$ و $E_{c}/E_{m} = 0.5$ ارائه شده است و نشان میدهد که برای $C_{c}/E_{m} = 0.5$ نظرفیت کمانشی مدل سه لایهایC، بیشتر از ظرفیت کمانشی دو مدل دیگر است. دلیل آن نیز به کمتر بودن کمانشی دو مدل دیگر است. دلیل آن نیز به کمتر بودن کسر حجمی جزء سرامیکی (جنس ضعیف در حالت کسر حجمی جزء سرامیکی (جنس ضعیف در حالت حالت 1 ($E_{c}/E_{m} < 1$) با مدول بزرگتر است. اما برای حالت 2 (E_{m}/E_{m}) با مدول بزرگتر است. اما برای ضخامت لایه همگن سرامیکی (جنس قویتر ضخامت لایه همگن سرامیکی (جنس دیگر مدل دیگر برخوردار است، بنابراین ظرفیت کمانش لنگری این مدل

در شکل ۱۴ منحنی های کمانش تیر ناودانی دو سر

ساده در برابر p، برای سه مدل مختلف از توزیع



در مقایسه با دو مدل دیگر (به سبب بالا بودن سختی

خمشی) بزرگتر است.



۶–۴–۲– آنالیز اثرگذاری نقطه اثر بارگذاری نیروئی روی ظرفیت کمانش

در شکل ۱۵ منحنی های مشخصه کمانش نسبت به

14

تغییرات p، متناظر با بارگذاری نیروئی متمرکز در سه نقطه مختلف واقع بر مقطع عرضی: الف) اعمال نیروی متمرکز در مرکز تار فوقانی بال بالائی، ب) اعمال نیرو در مرکز برش مقطع، ج) اعمال نیروی متمرکز در مرکز $b_1 = 3b_2$ متمرکز در مرکز تار تحتانی بال پائینی، متناظر با حالت خاص $b_2 = b_1$ ، ارائه شده است. مطابق این شکل بوضوح مشاهده می-شود که در حالت (ج) که در آن نیروی متمرکز عرضی در مرکز تار تحتانی بال پائینی اعمال شده است در مقایسه با دو حالت دیگر (حالت الف و ب) از بیشترین ظرفیت کمانشی برخوردار است.



شکل ۱۵: تغییرات بار کمانش در برابر شاخص توانی، برای بارگذاری متمرکز در سه نقطه از مقطع عرضی.

۲-۴-۷ بررسی تغییرات پارامتر تیر I شکل روی ظرفیت کمانش جانبی-پیچشی

در شکل ۱۶ نیز منحنی تغییرات پارامتر مشخصه مقاومت $\overline{K} = \sqrt{\pi^2 (EI)_y b_3^2 / 4 (GJ)_{com} L^2}$ تیر شکل (با مدل توزیع خواص نوع B) که تابعی صلبیت های خمشی $(GJ)_{com}$ و پیچشی $(EI_y)_{com}$ است در برابر شاخص توانی p، برای شش مقدار از ثابت تخلخل نشان داده شده است. پیداست که به ازاء جمیع مقادیر

داده از ثابت تخلخل، ابتدا با افزایش شاخص توانی (کاهش سهم جزء سرامیکی)، مقدار پارامتر \overline{K} تارسیدن به مقادیر اکسترمم مربوطه افزایش یافته و سپس با ادامه افزایش q، مقدار \overline{K} نیز رو به کاهش می گذارد. علاوه بر این در محدوده داده شده از شاخص توانی، با افزایش ثابت تخلخل پارامتر مشخصه \overline{K} بترتیب افزایش



برای مطالعه اثرگذاری تعداد المانهای طولی انتخابی تیر یعنی Ne روی ظرفیت کمانش جانبی، در شکل ۱۷ تغییرات بار متمرکز نیروئی در برابر شاخص توانی p، برای شش انتخاب مختلف از تعداد المانهای طولی انتخابی در امتداد تیر بتصویر کشیده شده است. با مقایسه رفتار این منحنیها پیداست که با افزایش تعداد المانها در طول تیر منحنی های مشخصه به سمت منحنی مشخصه یکتای متناظر با حل دقیق همگراء شده طوریکه برای 10 $\leq Ne$ نتایج مستخرج از استقلال محاسباتی نسبت به تعداد المانهای انتخابی برخوردار خواهند شد.



برای مطالعه و مقایسه اثرگذاری نحوه توزیع درجه بندی شده تخلخل ساختاری روی ظرفیت کمانش جانبی تیر I شکل، می توان برای چهار مدل مختلف از تخلخل نشان داده شده در شکل ۱۸ بصورت: الف) نامتخلخل (سالم)، ب) تخلخل معام ۲) تخلخل -un نامتخلخل (سالم)، ب) تخلخل even ج) تخلخل مدول الاستیسیته تیر در راستای ضخامت اعضاء جان و بال مقطع بصورت زیر توصیف کرد:

$$E(n) = E_m + (E_c - E_m)V_c(n)$$
 (۲۴)
(۲۴) برای تیر با مدل تخلخل even:

$$\frac{E(n) = E_m + (E_c - E_m)V_c(n)}{-\lambda(E_c + E_m)/2}$$
(Y\Delta)

ج) برای تیر با مدل تخلخل un-even:

$$E(\mathbf{n}) = E_{\mathbf{m}} + (E_{c} - E_{\mathbf{m}})V_{c}(\mathbf{n})$$

$$-\lambda (E_{c} + E_{\mathbf{m}})(1/2 - |\mathbf{n}|/h)$$

$$(\Upsilon \mathcal{P})$$

$$= I \text{ og-un-even} \quad |\mathbf{x}| = \mathbf{i} \text{ of } \mathbf{x} \text{ of }$$

د) برای تیر با مدل تخلخل Log-un-even:

$$E(n) = E_{m} + (E_{c} - E_{m}) V_{c}(n)$$

$$-\log_{10}(1 + \frac{\lambda}{2}) (E_{c} + E_{m}) (1 - 2|n|/h)$$
(YV)
$$Perfect$$
Imperfect (even)
$$Imperfect (even)$$

Imperfect (uneven)

شکل ۱۸– مدل های مختلف از تخلخل درجه بندی شده در

Imperfect

(logarithmic-uneven)

راستای ضخامت.

در شکل ۱۹ تغییرات ظرفیت کمانش جانبی تحت بارگذاری گسترده در برابر شاخص توانی ۹ برای چهار مدل مختلف از تخلخل بتصویر کشیده شده است. با مقایسه رفتار این منحنی ها به ازاء جمیع مقادیر از شاخص توانی روی محور افقی تیر سالم (نامتخلخل) و تیر با مدل تخلخل even یکنواخت بترتیب از بیشترین و کمترین مقاومت کمانشی تحت اثر بار گسترده



در این مقاله با بکارگیری روش عددی مبتنی بر

اعمال روش المان محدود و متناظر با شرایط مرزی مفروض ماتریس های سختی، خمشی و سختی هندسی حاصل گردید و با حل عددی مساله مقدار ویژه حاکم، ریشههای معادله مشخصه به عنوان ظرفیتهای بحرانی کمانشی محوری و جانبی محاسبه شد و نشان داده شد که پارامترهای گوناگون مسأله اعم از نسبت ابعاد هندسی تیر، شاخص اختلاط، درجه گیرداری تیر، هندسه مقطع عرضی تیر و نوع بار گذاری محوری/جانبی نقش بسزائی در تعیین محدوده کمانش خمشی – جانبی ایفاء میکنند. روش المان محدود، ظرفیت کمانش محوری - جانبی -خمشی تیرهای تابعی جدار نازک I شکل و ناودانی متناظر با شرایط مرزی سه گانه: الف) دوسر ساده، ب) یکسر گیردار - یکسر ساده و ج) دو سر گیردار بدست آمد و تاثیر درجه گیرداری تکیه گاهی روی ناپایداری استاتیکی مساله آنالیز شد. برای این منظور با بهره گیری از اصل کار مجازی، انرژی پتانسیل کلی سیستم توام با منعکس کردن اثر کارهای انجام شده بارگذاریهای جانبی بدست آمد و معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر ناپایداری استاتیکی با دخالت دادن اثر عامل کوپلینگ

- ۳- مراجع
- N. D. Duc and T. Q. Quan, "Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 48, pp. 435-448, 2012.

- [2] T. M. Tu, T. H. Quoc, and N. Van Long, "Vibration analysis of functionally graded plates using the eight-unknown higher order shear deformation theory in thermal environments," *Aerospace Science and Technology*, vol. 84, pp. 698-711, 2019.
- [3] T.-T. Nguyen, P. Tháng, and J. Lee, "Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams," *Thin-Walled Structures*, vol. 110, 01/31 2017.
- [4] B. Kieback, A. Neubrand, and H. Riedel, "Processing techniques for functionally graded materials," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 81-106, 2003.
- [5] Y. Q. Wang and J. W. Zu, "Vibration characteristics of moving sigmoid functionally graded plates containing porosities," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 14, pp. 473-489, 2018.
- [6] W. Liu and J. N. DuPont, "Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by Laser Engineered Net Shaping," *Scripta Materialia*, vol. 48, pp. 1337-1342, 2003/05/01/2003.
- [7] W. Yoshimi, I. Yoshifumi, H. Sato, and E. Miura-Fujiwara, "A Novel Fabrication Method for Functionally Graded Materials under Centrifugal Force: The Centrifugal Mixed-Powder Method," *Materials*, vol. 2, 12/01 2009.
- [8] G. Q. Jin and W. D. Li, "Adaptive rapid prototyping/manufacturing for functionally graded material-based biomedical models," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 65, pp. 97-113, 2013.

- [9] V. Kahya and M. Turan, "Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory," Composites Part B: Engineering, vol. 109, pp. 108-115, 2017/01/15/ 2017.
- [10] P. Phung-Van, Q. X. Lieu, H. Nguyen-Xuan, and M. Abdel Wahab, "Size-dependent isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates," Composite Structures, vol. 166, pp. 120-135, 2017/04/15/ 2017.
- [11] V. Kahya and M. Turan, "Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element," Composites Part B: Engineering, vol. 146, pp. 198-212, 2018/08/01/2018.
- [12] M. Avcar and W. K. M. Mohammed, "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation," Arabian Journal of Geosciences, vol. 11, p. 232, 2018/05/16 2018.
- T. Vo-Duy, V. Ho-Huu, and T. Nguyen-Thoi, "Free vibration analysis of laminated FG-CNT [13] reinforced composite beams using finite element method," Frontiers of Structural and Civil Engineering, vol. 13, pp. 324-336, 2019.
- M. Avcar, "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams," Steel [14] and Composite Structures, vol. 30, pp. 603-615, 03/25 2019.
- H. Alsaid Alwan and M. Avcar, "Analytical solution of free vibration of FG beam utilizing different [15] types of beam theories: A comparative study," Computers and Concrete, vol. 26, pp. 285-292, 09/23 2020.
- H. Babaei, Y. Kiani, and M. Reza Eslami, "Thermal buckling and post-buckling analysis of [16] geometrically imperfect FGM clamped tubes on nonlinear elastic foundation," Applied Mathematical Modelling, vol. 71, pp. 12-30, 2019/07/01/ 2019.
- [17] H. Youzera, S. A. Meftah, M. M. Selim, and A. Tounsi, "Finite element method for axial and bending coupling effect on free vibration response of functionally graded beams under thermal environment," Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 29, pp. 6436-6450, 2022/12/14 2022.
- [18] M. Wang, M. He, Z. Liang, D. Wu, Y. Wang, X. Qing, et al., "Fatigue damage monitoring of composite laminates based on acoustic emission and digital image correlation techniques," Composite Structures, vol. 321, p. 117239, 2023/10/01/ 2023.
- [19] X. Xie, J. Bai, and W. Zuo, "Topology optimization of fiber-reinforced concrete structures using membrane-embedded model," Engineering Structures, vol. 314, p. 118299, 2024/09/01/ 2024.
- [20] T. T. Nguyen, P. T. Thang, and J. Lee, "Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams," Composite Structures, vol. 160, pp. 952-963, 2017.

			واژه نامه انگلیسی:
Even	يكنواخت	Log-un-even	غير يكنواخت به صورت لگاريتمي
FGM	مواد مدرج تابعي	Un-even	غير يكنواخت