

بررسی کمی میزان دقت روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روشهای دیگر عددی برای بارگذاری هارمونیک - مطالعه موردی یک سازه نرم شونده دو درجه آزاد

چکیده

در این مقاله، پاسخ جابه‌جایی یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیرخطی، تحت طیفی از بارگذاری های سینوسی با فرکانس های مختلف و به ازای PGA های متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. از ۸ روش عددی که شامل روش شتاب مرتبه ۳، روش شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک (روش شتاب خطی)، روش نیومارک (روش شتاب متوسط)، روش ویلسون-تتا، روش تفاضل مرکزی، روش جینگز و روش پاسخ تحلیلی بود، برای محاسبه پاسخ جابه‌جایی این سیستم استفاده گردید. با استفاده از این هشت روش، جابه‌جایی این سیستم به ازای PGA های مختلف محاسبه گردید و مقادیر جذر میانگین مربعات خطا و ضریب تغییرات خطای این ۸ روش به ازای Δt های مختلف محاسبه گردید که نتایج کار به صورت نمودارهایی میله‌ای آورده شده است.

کلمات کلیدی: روش شتاب مرتبه ۳، روش های عددی در دینامیک سازه ها، سیستم نرم شونده، جذر میانگین مربعات خطا، ضریب تغییرات خطا

Abstract

In this paper, the displacement response of a nonlinear two-degree-of-freedom softening system is investigated under a range of sinusoidal loadings with different frequencies and for different PGAs. Eight numerical methods including the 3rd-order acceleration method, the 2nd-order acceleration method, the Newmark method (linear acceleration method), the Newmark method (average acceleration method), the Wilson-Theta method, the central difference method, the Jennings method and the innovative method were used to calculate the displacement response of this system. Using these eight methods, the displacement of this system was calculated for different PGAs and the values of the root mean square error and the error coefficient of variation of these 8 methods were calculated for different Δt s, and the results of the work are presented in the form of bar graphs.

Keywords: 3rd-order acceleration method, numerical methods in structural dynamics, softening system, root mean square error, error coefficient of variation

۱- مقدمه

در حالت کلی، رفتار دینامیکی سازه‌ها به دو صورت خطی و غیرخطی در نظر گرفته می‌شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم‌ها یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود بطوریکه روش‌های حل آن به دو دسته کلی روش جمع آثار مدی و روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی دسته‌بندی می‌شود.

در سیستم‌های غیرخطی، اگر پاسخ سازه در لحظه t موردنظر باشد، طبق روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، ابتدا بازه $[0, t]$ به n زیر بازه تقسیم شده که معمولاً طول این زیر بازه‌ها (Δt) را با هم مساوی در نظر می‌گیرند. در هر یک از این زیر بازه‌ها $(\Delta t = t/n)$ خصوصیات سازه مانند سختی، ثابت در نظر گرفته شده و پاسخ در انتهای هر گام محاسبه می‌شود و سپس، از این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود.

از بین روش‌های انتگرال‌گیری زمانی مشروط پایدار، روش‌های شتاب خطی نیومارک و تفاضل مرکزی به علت دقت خوب، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این دو روش کلاسیک، مرتبه تغییرات شتاب، حداکثر بصورت خطی تغییر می‌کند.

در مرجع [۱] مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض شده که در نتیجه چند جمله‌ای مرتبه چهار تابع جابه‌جایی، دارای پنج ضریب مجهول خواهد بود. در این تحقیق، این مقاله به عنوان مرجع اصلی در نظر گرفته شد با این تفاوت که مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت درجه ۳ در نظر گرفته شد. در نتیجه، در این حالت که شتاب به صورت چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته شد، تابع جابه‌جایی، یک تابع درجه ۵ با شش ضریب بود. با توجه به اینکه با افزایش مرتبه شتاب، تعداد جملات بیشتری در بسط سری تیلور نسبت به روش‌های کلاسیک موجود در نظر گرفته می‌شود بنابراین انتظار می‌رود که در روش پیشنهادی با مرتبه شتاب درجه ۳، دقت آن نسبت به روش‌های کلاسیک دیگر بالاتر باشد. در این پژوهش، چون مطالعه موردی بر روی یک سیستم غیرخطی نرم‌شونده صورت گرفته است در نتیجه، لزوماً با افزایش مرتبه شتاب، دقت تحلیل افزایش نمی‌یابد. در این روش برای محاسبه انتگرال باقی‌مانده وزندار از روش حداقل مربعات استفاده شد.

غلامپور و همکاران [۱]، یک روش باقیمانده وزندار با استفاده از چند تابع وزنی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه‌ها ارائه نمودند. آنها مرتبه تغییرات شتاب را در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض نمودند. در نتیجه چندجمله‌ای جابه‌جایی مربوطه از درجه ۴ بود و لازم بود که پنج ضریب مجهول این چندجمله‌ای محاسبه گردد. آنها برای محاسبه این پنج ضریب مجهول از پنج معادله استفاده نمودند. آنها سه معادله از این ۵ معادله را از ارضای معادلات جابه‌جایی، سرعت و شتاب در ابتدای هر گام بدست آوردند. آنها دو معادله دیگر را با محاسبه انتگرال باقیمانده وزندار و با چهار تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین، حداقل مربعات و کالوکیشن بدست آوردند. آنها اذعان داشتند که از روش شتاب سهموی پاسخ‌های بهتر و دقیق‌تری حاصل می‌گردد.

قاسمیه و کریمی راد [۲]، یک روش جدید انتگرال‌گیری زمانی برای حل معادله حرکت پیشنهاد نمودند. آنها بیان داشتند با افزایش مرتبه تغییرات شتاب به صورت سهموی، دقت انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد و روش جدید به صورت غیرمشروط پایدار می‌باشد. آنها همچنین اذعان داشتند در سازه‌های چند درجه آزادی برای میرا شدن اثر مدهای مصنوعی از پاسخ سازه بایستی از یک الگوریتم انتگرال‌گیری با میرایی عددی استفاده شود.

غلامپور و قاسمیه [۳]، یک روش جدید انتگرال‌گیری مستقیم زمانی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه‌ای ارائه نمودند. در روش پیشنهادی آنها مرتبه انتگرال‌گیری زمانی آنها بالاتر از مرتبه انتگرال‌گیری خانواده روش‌های مرسوم نیومارک بود. آنها تغییرات شتاب را در هر

گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفتند. آنها دو پارامتر متغیر برای افزایش پایداری و دقت روش خود استفاده نمودند. آنها نتایج به دست آمده از این روش جدید مرتبه بالاتر را با روش ضمنی ویلسون-تتا و نیز روش شتاب متوسط نیومارک مقایسه نمودند.

غلامپور و قاسمیه [۴]، یک روش جدیدی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی با استفاده از انتگرال گیری مستقیم زمانی پیشنهاد نمودند. در روش پیشنهادی آنها که شامل مجموعه ای از روش های مستقیم انتگرال گیری زمانی بود، مرتبه انتگرال گیری بالاتر از روش های کلاسیک و متعارف بود. در روش پیشنهاد شده توسط آنها، تغییرات درجه دوم برای شتاب در هر گام زمانی فرض می گردید. آنها نتایج به دست آمده از این روش جدید مرتبه بالاتر را با روش تفاضل مرکزی و نیز روش شتاب خطی نیومارک مقایسه نمودند. آنها اذعان داشتند با توجه به مرتبه بالاتر تغییرات شتاب در هر گام زمانی نسبت به روش های کلاسیک، دقت این روش نسبت به روش های کلاسیک بالاتر است.

محمودآبادی و همکاران [۵]، روش جنینگز را با استفاده از تابع درونیابی اسپلاین درجه سه ارتقاء دادند. آنها به صورت مقایسه ای مزیت ها و معایب روش جنینگز که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک بود را نسبت به روش درونیابی اسپلاین ارزیابی نمودند.

محمودآبادی و همکاران [۶]، طیف های شبه شتاب سه شتابنگاشت السنترو، ناغان و طبس که با روش درونیابی خطی تحریک (روش جنینگز) و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی بدست آمده بودند، با یکدیگر مقایسه نمودند. آنها سه شتابنگاشت السنترو، ناغان و طبس در نظر گرفتند و طیف پاسخ شبه شتاب همپایه شده (ضریب برش پایه) آنها برای مقادیر میرایی های مختلف با استفاده از روش درونیابی خطی و نیز درونیابی با تابع اسپلاین محاسبه نمودند. آنها اذعان داشتند که مقادیر طیف شبه شتاب محاسبه شده با روش درونیابی اسپلاین در دوره تناوب های خیلی کوچک و میرایی های کم، اختلاف قابل ملاحظه ای با مقادیر متناظر طیف شبه شتاب محاسبه شده با روش درونیابی خطی دارد.

محمودآبادی و حسینی [۷]، طیف های پاسخ غیرخطی شبه شتاب سیستم های الاستوپلاستیک با شکل پذیری ثابت برای سه شتابنگاشت که با روش درونیابی خطی تحریک و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی بدست آمده بودند، با یکدیگر مقایسه نمودند. طیف های پاسخ غیرخطی برای شکل پذیری های ۱، ۱/۵، ۲، ۴ و ۸ محاسبه شدند. برای بررسی جزئی تر، فاصله زمانی بین نقاط شتابنگاشت ها به ترتیب به ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم گردیدند و شتابنگاشت های جدیدی یکبار با استفاده از درونیابی خطی و یکبار با استفاده از درونیابی اسپلاین تولید گردید و طیف های پاسخ غیر خطی این دو نوع شتابنگاشت با یکدیگر مقایسه شدند. نتایج کار حاکی از این موضوع بود که مقادیر بیشینه و کمینه اختلاف مقادیر قابل ملاحظه ای داشتند.

محمودآبادی و همکاران [۸]، روش عددی شتاب مرتبه ۳ را ارائه نمودند. فرض اساسی این روش این بود که تغییرات شتاب در بازه زمانی Δt به صورت یک چندجمله ای درجه سوم باشد که در نتیجه، معادله تغییر مکان آن که با دو بار انتگرال گیری از معادله شتاب بدست می آید یک منحنی درجه پنج است که دارای شش ضریب مجهول می باشد. برای مقایسه کمی میزان خطای این روش با دیگر روش های مطرح عددی، یک سیستم یک درجه آزاد خطی با فرکانس یک هرتز و میرایی های مشخص ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد در نظر گرفته شد. سپس، به این سیستم، بارگذاری هارمونیک سینوسی با فرکانس مشخص اعمال گردید. پاسخ دقیق این سیستم در کتب دینامیک سازه ها موجود می باشد. نسبت فرکانس بارگذاری به فرکانس ارتعاش طبیعی سیستم از ۰/۱ تا ۳ با افزایش ۰/۱ تغییر می کرد. مقایسه برای ده Δt که کوچکترین آنها برابر با ۰/۲ ثانیه و بزرگترین آنها برابر با ۰/۲۰ ثانیه بود انجام گردید. میزان کاهش خطا برای روش شتاب مرتبه سه نسبت به روش شتاب مرتبه دوم ناچیز بود. کمترین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقاء یافته و بیشترین خطا نیز در بعضی Δt ها مربوط به روش ویلسون و در سایر Δt ها مربوط به روش تفاضل مرکزی است.

محمود آبادی و همکاران [۹]، به بررسی پاسخ جابه‌جایی یک سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده غیرخطی تحت بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌ها و دامنه‌های مختلف پرداختند. در این مطالعه، با استفاده از ۹ روش عددی، پاسخ جابه‌جایی سیستم در شرایط مختلف محاسبه گردید. با استفاده از روش ابداعی و استفاده از Δt برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه، پاسخ جابه‌جایی سیستم به عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردید. نتایج بررسی‌ها نشان داد که خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به خطای روش شتاب مرتبه ۲ به ازای Δt ‌ها و دامنه نیروهای مختلف، تفاوت چندانی با یکدیگر نداشتند. همچنین، کمترین میزان خطا، عموماً مربوط به روش جنینگز ارتقاء یافته و بیشترین آن اغلب مربوط به روش ویلسون و روش تفاضل مرکزی می‌گردید.

چانگ^۱ [۱۰]، به بررسی روش ساده نیومارک پرداخت که بر اساس نتایج ارزیابی تحلیلی انجام شده بود. او اذعان داشت در حل گام به گام یک سیستم الاستیک خطی، یک گام زمانی مناسب می‌تواند بر پایه نتایج ارزیابی تحلیلی انتخاب شود؛ اگر چه هیچ راهی برای انتخاب یک گام زمانی مناسب برای انتگرال‌گیری دقیق یک سیستم غیر خطی وجود ندارد. او در این مطالعه بعد از معرفی درجه غیر خطی لحظه‌ای، ویژگی‌های عددی روش صریح نیومارک رابه صورت تحلیلی مورد ارزیابی قرار داد.

در این مقاله از قابلیت‌های نرم افزارهای محاسباتی مانند متلب^۲ استفاده شده است و به صورت کمی میزان دقت روش شتاب عددی درجه ۳ را با روش‌های کلاسیک دیگر مانند روش شتاب متوسط نیومارک، روش شتاب خطی نیومارک، روش ویلسون-تتا و روش شتاب سهموی که در مرجع [۱] ارائه گردیده است، مقایسه گردیده است.

در مرجع [۱] ساختارسازی روش شتاب سهموی ارائه گردیده است. در این روش، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفته شده است. در این مقاله، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شده است که این موضوع نوآوری این مقاله می‌باشد. نویسندگان این مقاله بر این باورند که بسط روش شتاب مرتبه ۳ برای اولین بار است که لافل در ایران انجام می‌شود. لازم به ذکر است در این مرجع پاسخ دقیق یک ساختمان برشی با رفتار غیر خطی تحت بارگذاری سینوسی محاسبه گردیده است و سپس پاسخ تقریبی آن با روش نیومارک و روش شتاب سهموی محاسبه گردیده است و به صورت نمودارهای تاریخچه زمانی، پاسخ طبقات اول و دوم با پاسخ دقیق آنها مقایسه شده است. نقیصی که به نظر می‌رسد در این مرجع وجود دارد، این است که پاسخ‌های تقریبی با پاسخ‌های دقیق متناظرشان به صورت کیفی و نموداری مقایسه شده‌اند. در این مقاله، خطاهای ۸ روش مختلف عددی، به صورت کمی (عددی) محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در این مقاله، پاسخ جابه‌جایی یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیرخطی، تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف و دامنه نیروهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس زاویه‌ای بارگذاری سینوسی از ۱ تا ۳۰ رادیان بر ثانیه با افزایش ۰/۱ رادیان بر ثانیه تغییر داده شد و بدین ترتیب پاسخ این سیستم تحت این ۳۰ بارگذاری سینوسی با ۸ روش عددی مطرح گردیده در این مقاله، محاسبه گردیده است. با استفاده از روش پاسخ تحلیلی و با استفاده از Δt برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه، پاسخ جابه‌جایی سیستم محاسبه و به عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردیده است. سپس برای Δt ‌های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۳، ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۵، ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۷ و با استفاده از ۸ روش عددی نام برده شده در بخش چکیده، پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای PGAهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه محاسبه گردید و مقادیر جذر میانگین مربعات خطا برای Δt ‌های تعریف شده در بالا محاسبه گردید. برای مقایسه روش‌های مختلف با یکدیگر، میانگین خطاهای فرکانس‌های مختلف و نیز ضریب

¹ Chang

² Matlab

تغییرات آنها با یکدیگر مقایسه شده و نتیجه گیری های لازم انجام شده است. علاوه بر این، روش شتاب سهموی، به روش شتاب مرتبه سوم بسط داده شده و میزان خطای این روش و نیز ضریب تغییرات آن، با روش شتاب مرتبه دوم (سهموی)، مقایسه و نتیجه گیری های لازم انجام شده است.

در ادامه در بخش ۲، روش شتاب مرتبه ۳ به تفصیل شرح داده شده است. همچنین در بخش های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ مقاله، به ترتیب روش های شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک، (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی و روش جینگز و در بخش ۸، روش پاسخ تحلیلی شرح داده شده است. در بخش ۹ و ۱۰، یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیرخطی، تحت طیف وسیعی از بارگذاری های هارمونیک سینوسی قرار گرفته و خطاهای روش های مختلف با یکدیگر مقایسه شده اند. در بخش ۱۱ نتیجه گیری و در پایان در در بخش ۱۲، پیشنهادات برای کارهای بعدی آمده است.

۲- روش شتاب مرتبه ۳

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه یک درجه آزاد با رفتار خطی بصورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + K_i y = P(t) \quad (1)$$

که در این رابطه M ، C و K_i به ترتیب جرم، میرایی و سختی سازه است. $P(t)$ نیروی وارده به سازه و y ، $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ به ترتیب جابه جایی، سرعت و شتاب خواهند بود. در روش پیشنهادی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت یک چند جمله ای مرتبه سوم در نظر گرفته می شود که در نتیجه تغییرات تغییر مکان در هر گام زمانی بصورت یک تابع چند جمله ای کامل مرتبه پنج خواهد بود که این تابع به صورت رابطه زیر نوشته می شود:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (2)$$

که در این رابطه a تا f شش ضریب ثابت مجهول است که باید در هر گام زمانی محاسبه شوند.

با مشتق گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، توابع سرعت و شتاب بصورت روابط زیر بدست می آیند:

$$\dot{y}(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (3)$$

$$\ddot{y}(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (4)$$

برای محاسبه این شش ضریب ثابت مجهول در هر گام زمانی، به شش معادله نیاز داریم. سه معادله از ارضای روابط جابه جایی و سرعت و شتاب در ابتدای هر گام زمانی بدست می آید که به صورت رابطه زیر می باشد:

$$y(t=0)=f=y_0, \quad \dot{y}(t=0)=e=\dot{y}_0, \quad \ddot{y}(t=0)=2d=\ddot{y}_0 \quad (5)$$

از طرفی با ارضای معادله حرکت در ابتدای گام زمانی داریم:

$$M\ddot{y}_0 + C\dot{y}_0 + Ky_0 = p_0 \quad (6)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۵) در رابطه (۶) داریم:

$$M(2d) + C(e) + K(f) = p_o \rightarrow d = \frac{p_o - C.e - K.f}{2M} \quad (9)$$

معادله چهارم، طبق معادله (۸) از ارضای معادله حرکت در انتهای گام زمانی بدست می آید.

$$M. \ddot{y}_{\Delta t} + C. \dot{y}_{\Delta t} + K. y_{\Delta t} = p_{\Delta t} \quad (8)$$

$$M. (20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d) + C. (5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e) + K_0(a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f) = p_{\Delta t} \quad (9)$$

همانطور که می دانیم در این روش عددی مانند روش های کلاسیک دیگر، به دلیل تقریبی بودن معادله تعادل حرکت در بازه $[0, t]$ بطور کامل ارضا نمی شود. در نتیجه یک تابع باقیمانده می توان تعریف نمود، بطوریکه:

$$\text{residual} = P - M \ddot{y} - C \dot{y} - Ky \quad (10)$$

که برای حداقل سازی این تابع باقیمانده از انتگرال باقیمانده وزنی استفاده می کنیم که:

$$\int_0^{\Delta t} W_i \times (\text{residual}) dt = 0 \quad (11)$$

که در معادله (۱۱)، W_i تابع وزنی می باشد. برای یافتن ضرایب مجهول a, b و C توابع وزنی را در ادامه به صورت زیر در نظر می گیریم. حال با محاسبه این شش ثابت مجهول در هر گام زمانی، پاسخ در انتهای هر گام زمانی با استفاده از روابط زیر محاسبه می شود:

$$y(t) = a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f \quad (12)$$

$$\dot{y}(t) = 5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e \quad (13)$$

$$\ddot{y}(t) = 20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d \quad (14)$$

این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام زمانی بعدی در نظر گرفته شده و روابط فوق مجدداً برای گام بعدی استفاده می شود بطوریکه در انتها پاسخ در لحظه مورد نظر به دست آید. حال این توابع وزنی واحد بسط داده شده، پتروگالرکین بسط داده شده و حداقل مربعات، به صورت زیر تعریف می شوند:

۲-۱- تابع وزنی واحد بسط داده شده

در این حالت با استفاده از توابع وزنی $W_1 = 1$ و $W_2 = t$ رابطه (۱۱) به صورت رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\int_0^{\Delta t} (\text{residual}) dt = 0 \quad (15)$$

$$\int_0^{\Delta t} t(\text{residual}) dt = 0 \quad (16)$$

با در نظر گرفتن همزمان معادلات (۱۲) و (۱۳) و (۱۴)، مجهولات a و b و C محاسبه می شوند.

۲-۲- تابع وزنی پترو گالرکین بسط داده شده

در این روش، سه تابع وزنی به صورت زیر تعریف می شود:

$$W_1 = t, \quad W_2 = t^2, \quad W_3 = t^3 \quad (17)$$

بنابراین با توجه به این سه تابع وزنی، رابطه (۱۱) به روابط زیر تبدیل می شود:

$$\int_0^{\Delta t} t(residual)dt = 0 \quad (18)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^2(residual)dt = 0 \quad (19)$$

$$\int_0^{\Delta t} t^3(residual)dt = 0 \quad (20)$$

در نتیجه مجهولات a و b و c با حل همزمان معادلات (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) به دست می آیند.

۳-۲- تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده

مربع تابع باقیمانده به صورت رابطه زیر بیان می شود:

$$residual^2 = \int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + ky(t) - p(t)]^2 \quad (21)$$

برای حداقل سازی این تابع باقیمانده، سه معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial(residual)^2}{\partial a} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial(residual)^2}{\partial b} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial(residual)^2}{\partial c} = 0 \quad (24)$$

بنابراین با بکارگیری معادلات (۱۸) و (۱۹) و (۲۰)، در معادلات (۲۲) و (۲۳) و (۲۴)، به دست می آید:

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - p(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial a} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial a} + K \frac{\partial y(t)}{\partial a} \right) dt = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - p(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial b} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial b} + K \frac{\partial y(t)}{\partial b} \right) dt = 0 \quad (26)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - p(t)] \left(m \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial c} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial c} + K \frac{\partial y(t)}{\partial c} \right) dt = 0 \quad (27)$$

حال با حل همزمان معادلات (۲۵) و (۲۶) و (۲۷)، مجهولات a و b و c یافت می شوند.

۳- سایر روش های عددی

۳-۱- روش شتاب مرتبه ۲

در این روش شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع تغییر مکان یک چند جمله‌ای درجه چهار بر حسب زمان است. ساختارسازی این روش کاملاً شبیه به روش شتاب مرتبه ۳ می‌باشد که به لحاظ رعایت اختصار از آوردن آن صرف نظر شده است. روش شتاب مرتبه ۲ در مرجع [۱] به طور کامل توضیح داده شده است.

۳-۲- روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)

نیومارک در سال ۱۹۵۹ دو روش معروف، موسوم به روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی ارائه نموده است [۱۱]. در روش شتاب متوسط، تغییرات شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود، اما در روش شتاب خطی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی خطی فرض می‌شود. روش شتاب متوسط، برای هر مقدار Δt ، هر چقدر بزرگ باشد، از نظر عددی پایدار است، اما روش شتاب خطی برای $\Delta t \leq 0.551 T_n$ پایدار می‌باشد. روابط و ساختارسازی این روش در مرجع [۱۱] آمده است.

۳-۳- روش ویلسون

ویلسون روش شتاب خطی که به صورت مشروط پایدار بود را اصلاح نمود و آن را با اضافه نمودن پارامتری نام θ به صورت پایدار غیر مشروط درآورد. اگر $\theta = 1$ باشد، روش ویلسون به روش شتاب خطی تبدیل می‌گردد. اگر $\theta \geq 1/37$ باشد، روش ویلسون پایدار غیر مشروط است. به استناد مرجع [۱۱]، مقدار $\theta = 1/42$ دقت بهیچ‌گونه ندارد. در این مقاله از مقدار بهیچ‌گونه استفاده شده است.

۳-۴- روش تفاضل مرکزی

این روش مبتنی بر تقریب تفاضل محدود از مشتقات زمانی جابه‌جایی (یعنی سرعت و شتاب) است. این روش از روش‌های صریح می‌باشد و پایدار مشروط است. یعنی اگر $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$ باشد، از نظر عددی روش پایدار است. جزئیات این روش در مرجع [۱۰] آمده است.

۳-۵- روش جینگز

روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. علت اصلی نام‌گذاری این روش به نام جینگز، به مراجع [۱۱] و [۱۲] بر می‌گردد. در روش درون‌یابی خطی تحریک، نقاط شتابنگاشت با پاره‌خط‌هایی به یکدیگر متصل می‌شوند. در نتیجه در محل اتصال پاره‌خط‌ها، شیب آن‌ها لزوماً با یکدیگر برابر نمی‌باشد و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آن‌ها با یکدیگر برابر است. لازم به ذکر است روش جینگز مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک و چند درجه آزاد دینامیکی خطی قابل استفاده است. در این مقاله که یک سیستم دو درجه آزاد نرم‌شونده غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است، فرض شده است که در هر گام زمانی، سختی سیستم ثابت است و بر مبنای تغییر مکان‌های این سیستم در ابتدای گام، سختی سیستم محاسبه شده است و سپس این سیستم دو درجه آزاد خطی، به دو سیستم یک درجه آزاد خطی تبدیل گردیده است.

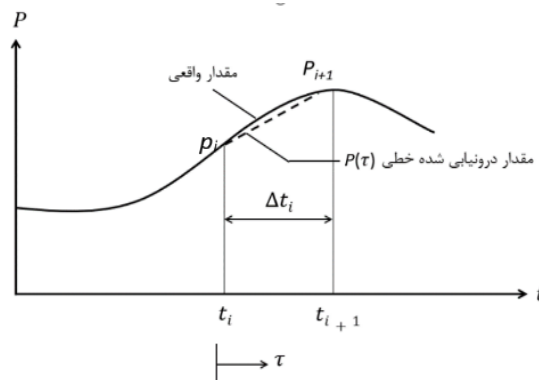
معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی خطی جرم-فنر-میراگر عبارت است از:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)$$

(۲۸)

که در این معادله u ، $\dot{u}$ و $\ddot{u}$ به ترتیب مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب جرم m می‌باشند.

روش جنین و شی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۲۸) می باشد. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تابع تحریک $P(t)$ است که در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱ - نمادهای مورد استفاده در درونیابی خطی تحریک [۱۱]

تابع تحریک $p(\tau)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ را می توان به صورت یک تابع خطی بر حسب τ به شکل زیر بیان نمود:

$$p(\tau) = P_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (29)$$

که در آن $\Delta p_i = P_{i+1} - P_i$ می باشد و متغیر τ از صفر تا Δt_i می کنند. جزئیات کار در مرجع [۱۰] توضیح داده شده است و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگشتی زیر برای محاسبه u_{i+1} و $\dot{u}_{i+1}$ ارائه شده است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (30)$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'\dot{u}_i + B'\ddot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (31)$$

مقادیر ضرایب $A, B, C, D, \dots, D'$ که در سمت راست روابط (۳۰) و (۳۱) وجود دارند، در مرجع [۱۰] آورده شده اند.

۳-۶- روش پاسخ تحلیلی

با توجه به اینکه پاسخ تحلیلی (دقیق) سیستم های یک درجه آزاد خطی نسبت به بارگذاری هارمونیک سینوسی در کتب دینامیک سازه ها موجود می باشد [۱۰]. لذا می توان در هر بازه زمانی Δt فرض نمود که سختی سیستم یک درجه آزاد مقدار ثابتی است و در این بازه زمانی از ساختارسازی موجود، استفاده نمود. در ابتدای هر بازه زمانی، سیستم دارای t_0 ای می باشد که مقدار آن از صفر تا $(N-1)\Delta t$ می تواند تغییر کند.

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega(t_0 + t) = p_0 [\sin \omega t_0 \times \cos \omega t + \cos \omega t_0 \times \sin \omega t] = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (32)$$

که در بالا ذکر گردید از صفر تا $(N-1)\Delta t$ می تواند تغییر کند. بنابراین $c_1 = p_0 \sin(\omega t_0)$ و $c_2 = p_0 \cos(\omega t_0)$ است. منظور از N ، تعداد نقاط بارگذاری سینوسی است. حل عمومی معادله دیفرانسیل (۳۲) عبارت است از:

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t, \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (33)$$

و حل خصوصی آن در حالتی که $\omega \neq \omega_n$ باشد (ω فرکانس بارگذاری سینوسی است) عبارت است از:

$$u_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (34)$$

و در حالتی که $\omega = \omega_n$ باشد (حالت تشدید) حل خصوصی معادله دیفرانسیل (۱۹) برابر است با:

$$u_p(t) = c_3 t \cos \omega_n t + c_4 t \sin \omega_n t \quad (35)$$

مقادیر ثابت A و B با اعمال شرایط اولیه در ابتدای بازه Δt محاسبه می‌شوند. همچنین، مقادیر ثابت c_1 و c_2 و c_3 و c_4 نیز با روش های مرسوم حل معادلات دیفرانسیل بدست می‌آیند.

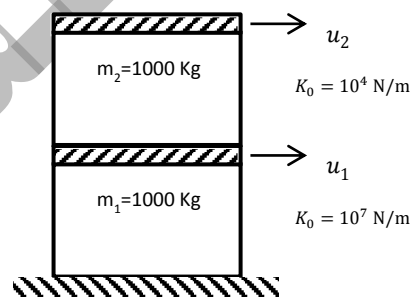
۴- مشخصات جرم و سختی سیستم دو درجه آزاد نرم شونده

یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده مطابق شکل (۲) بدون میرایی با جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم برای هر طبقه و سختی اولیه طبقه اول برابر 10^7 نیوتن بر متر و سختی اولیه طبقه دوم برابر 10^4 نیوتن بر متر مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات جرم و سختی این سیستم از مرجع [۱۰] اخذ گردیده است. همچنین، سختی‌ای که برای طبقه اول و دوم این مدل در نظر گرفته شده است، مطابق رابطه ۲۳ و ۲۴ می‌باشد:

$$K_1 = K_0[1 + \alpha_1 (u)^2] = 10^7[1 - 10^2(\Delta u)^2] \quad (36)$$

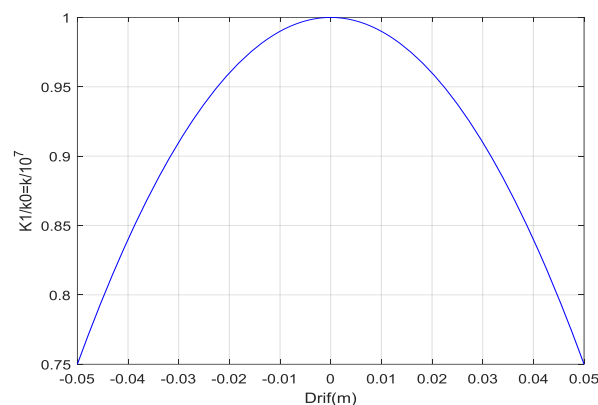
$$K_2 = K_0[1 + \alpha_2 (u)^2] = 10^4[1 - 10^{-3}(\Delta u)^2] \quad (37)$$

در رابطه (۳۶) و (۳۷)، Δu تغییر مکان نسبی طبقه می‌باشد.

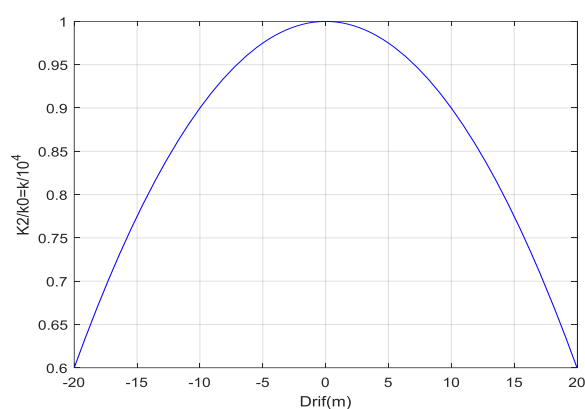


شکل (۲) مشخصات جرم و سختی اولیه سیستم دو درجه آزاد مورد بررسی.

تغییرات سختی طبقات اول و دوم برحسب تغییر مکان نسبی در شکل (۳) و (۴) آورده شده است. این شکل به صورت یک سهمی درجه دو است و حدود تغییرات جابه‌جایی نسبی در طبقه اول از -0.05 تا 0.05 متر و در طبقه دوم از -20 تا 20 متر در نظر گرفته شده است.

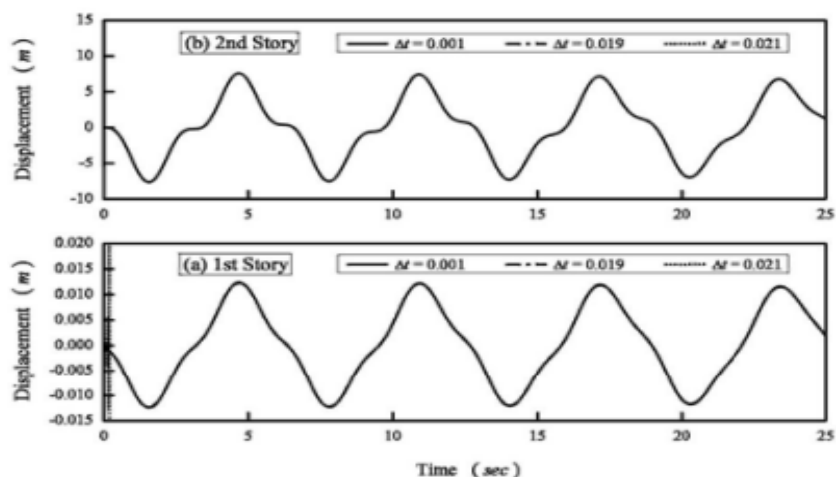


شکل (۳) تغییرات سختی طبقه اول سیستم نرم شونده برحسب تغییر مکان نسبی آنها.

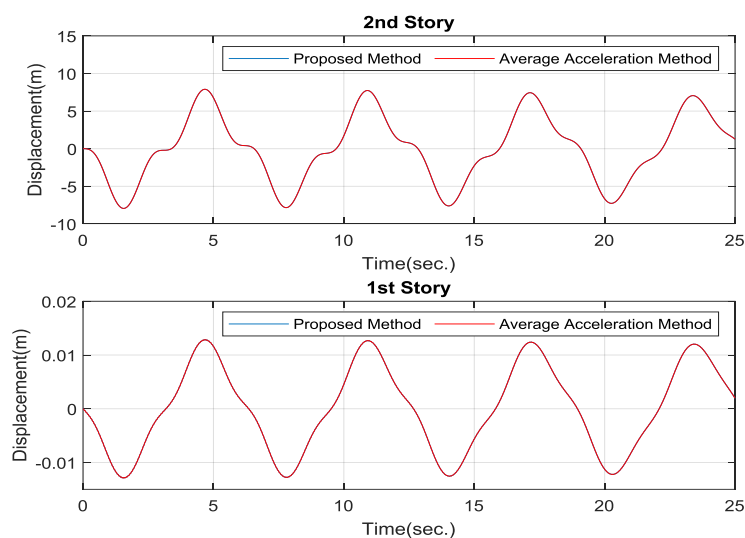


شکل (۴) تغییرات سختی طبقه دوم سیستم نرم شونده برحسب تغییر مکان نسبی آنها.

سیستم مورد بحث تحت شتاب نگاشت پایه $50 \sin(t)$ قرار داده شد و با دو روش پاسخ تحلیلی و نیومارک شتاب متوسط پاسخ جابجایی طبقات اول و دوم آن بدست آورده شده است. نمودارهای تاریخچه زمانی مربوطه در شکل ۶ آورده شده است. در مرجع [۹] نمودار تاریخچه زمانی این سیستم تحت این بارگذاری مطابق شکل ۵ داده شده است. این دو نمودار با هم تطابق مناسبی دارند و بدین ترتیب صحت محاسبات اثبات می‌گردد.



شکل (۵) نمودار تاریخچه زمانی تغییر مکان طبقات اول و دوم سیستم نرم شونده با $PGA = 50 \text{ m/s}^2$ و $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ با روش نیومارک برای فرکانس 1 rad/s [۹].

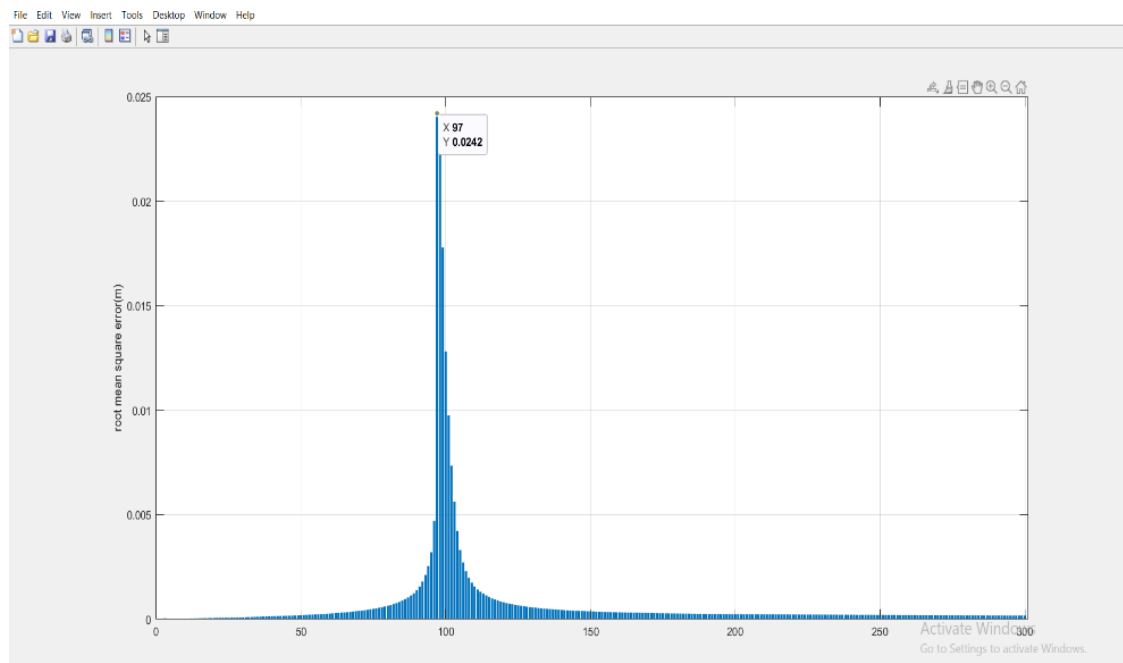


شکل (۶) نمودار تاریخچه زمانی تغییر مکان طبقات اول و دوم سیستم نرم شونده با $PGA = 50 \text{ m/s}^2$ و $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ با دو روش پاسخ تحلیلی و نیومارک شتاب متوسط برای فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه.

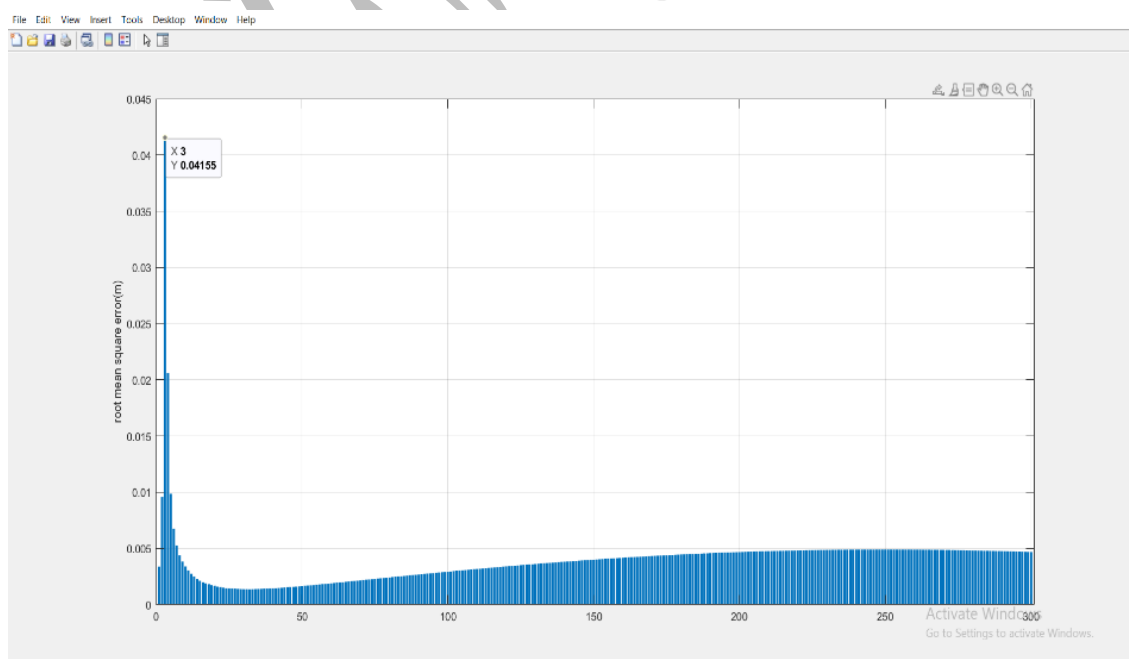
۵- مقایسه کمی میزان دقت روش‌های مختلف عددی با یکدیگر

سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیرخطی معرفی شده در بالا تحت طیف وسیعی از بارگذاری‌های هارمونیک سینوسی قرار گرفت. فرکانس زاویه‌ای بارگذاری سینوسی از ۱ تا ۳۰۰ رادیان بر ثانیه با افزایش ۱ رادیان بر ثانیه تغییر داده شد و بدین ترتیب پاسخ این سیستم تحت این ۳۰۰ بارگذاری سینوسی با ۸ روش عددی مطرح گردیده در بخش‌های قبلی محاسبه گردید. با استفاده از روش پاسخ تحلیلی و با استفاده از Δt برابر با 0.001 ثانیه پاسخ جابه‌جایی سیستم محاسبه گردید و به عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردید. علت این موضوع در مرجع [۹] توضیح داده شده است. سپس، برای Δt های 0.001 ، 0.002 ، 0.003 ، 0.004 ، 0.005 ، 0.006 و 0.007 ثانیه و با استفاده از ۸ روش عددی معرفی شده در بخش‌های قبلی پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای PGA های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه محاسبه گردید.

در شکل (۷) و (۸) به عنوان نمونه مقادیر جذرمیانگین مربعات خطا برای طبقات اول و دوم به صورت نمودار میله ای از نرم افزار متلب برای PGA ۵ متر بر مجذور ثانیه و گام زمانی ۰/۰۰۷ ثانیه آورده شده است. همانطور که مشاهده می شود حداکثر خطا در طبقه اول مربوط به فرکانس بارگذاری ۹۷ رادیان بر ثانیه می باشد. مقدار حداکثر خطا برابر $۲/۴۲ \times ۱۰^{-۲}$ متر و مقدار میانگین خطا برابر $۷/۳۹۹ \times ۱۰^{-۴}$ متر است. در طبقه دوم حداکثر خطا مربوط به فرکانس بارگذاری ۳ رادیان بر ثانیه می باشد. مقدار حداکثر خطا برابر $۴/۱۵۵ \times ۱۰^{-۲}$ متر و مقدار میانگین خطا برابر $۳/۸۹۳ \times ۱۰^{-۳}$ متر است.



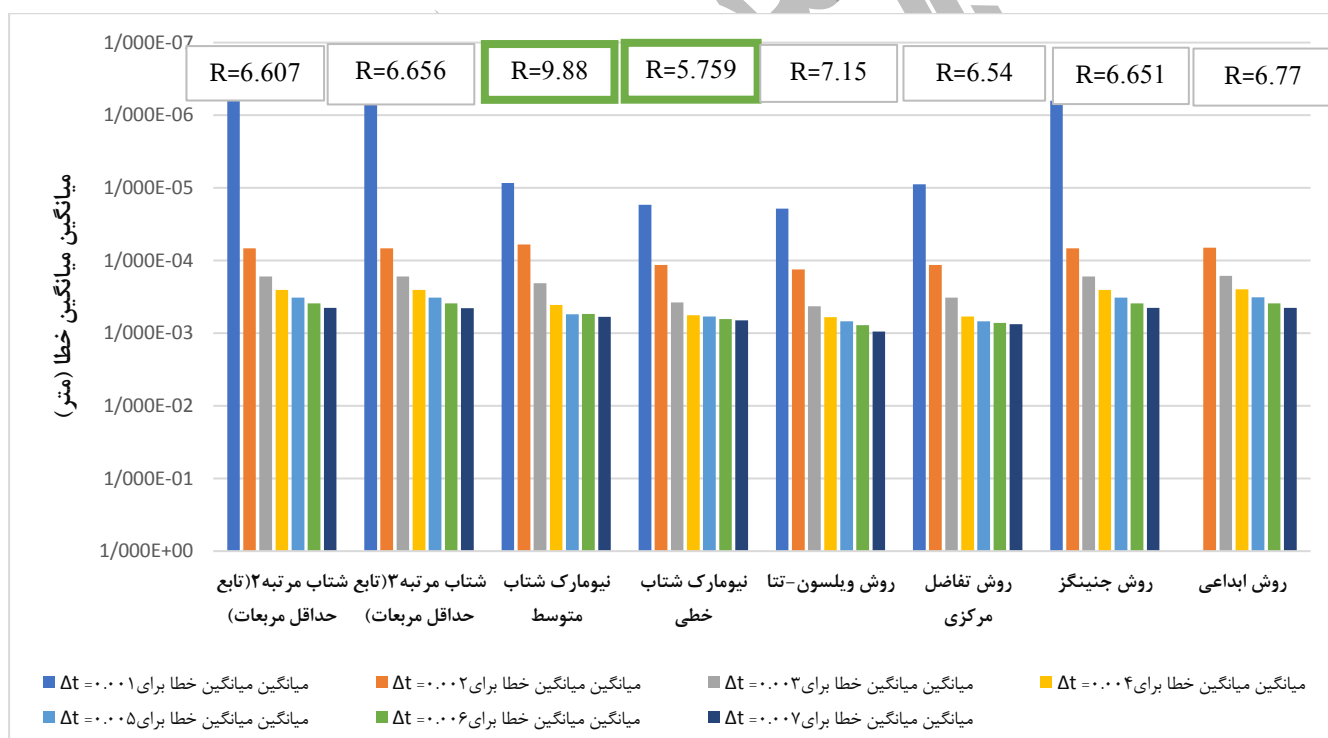
شکل (۷) مقادیر جذرمیانگین مربعات خطا برای طبقه اول روش شتاب مرتبه سوم، $\Delta t = ۰/۰۰۷$ ثانیه و $PGA = ۵ \text{ m/s}^2$



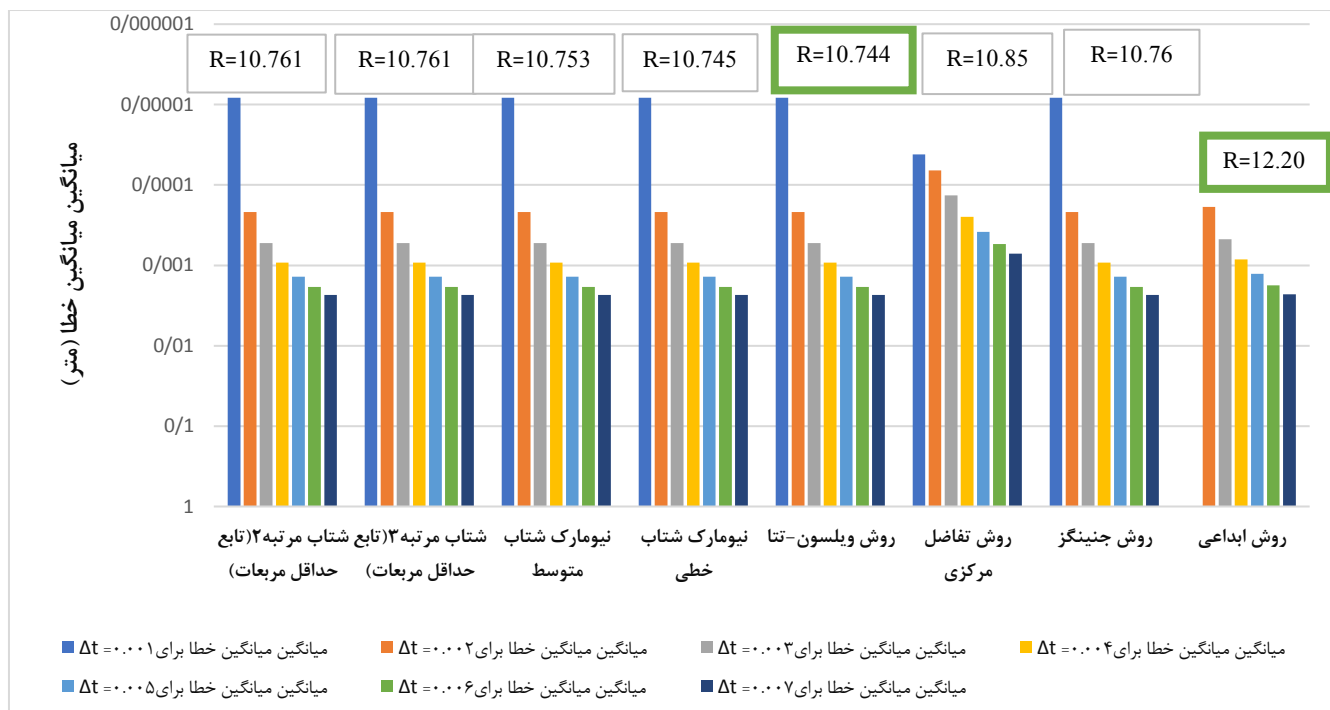
شکل (۸) مقادیر جذرمیانگین مربعات خطا برای طبقه دوم روش شتاب مرتبه سوم، $\Delta t = ۰/۰۰۷$ ثانیه و $PGA = ۵ \text{ m/s}^2$

۵-۱- نمودار میانگین کلی سیستم دو درجه آزاد نرم شونده

در نمودارهای میله‌ای نشان داده شده در شکل (۹) و شکل (۱۰)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب گام‌های زمانی مختلف طبقه اول و دوم، برای ۸ روش مذکور در این مقاله، آورده شده است. منظور از میانگین میانگین این است که یکبار با توجه به توضیحات بخش قبل، از مقادیر خطای بدست آمده برای ۳۰۰ فرکانس تحریک، میانگین گرفته شده است و بار دیگر از مقادیر بدست آمده، برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه به ازای PGAهای ۱ تا ۵ متر بر مجذور ثانیه میانگین می‌گیریم که در نتیجه برای هر گام زمانی، یک میانگین به دست می‌آید. در بالای نمودار میله‌ای هر روش، عددی در کادر درج گردیده است که بیانگر نسبت خطای گام زمانی ۰/۰۰۷ ثانیه به گام زمانی ۰/۰۰۲ ثانیه است. بزرگترین این نسبت‌ها برای طبقه اول، مربوط به روش نیومارک شتاب متوسط با نسبت ۹/۸۸ است که حساسیت زیاد این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش نیومارک شتاب خطی با نسبت ۵/۷۵۹ است که حساسیت کمتر این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد؛ و برای طبقه دوم، مربوط به روش پاسخ تحلیلی با نسبت ۱۲/۲۰ است که حساسیت نسبتاً زیاد این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. کمترین نسبت‌ها مربوط به روش تفاضل مرکزی با نسبت ۱۰/۷۴۴ است که حساسیت کمتر این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. با توجه به اینکه پاسخ جابه‌جایی روش پاسخ تحلیلی برای Δt برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه به عنوان پاسخ دقیق قلمداد شده است، در نمودارهای میله‌ای ارائه شده در شکل‌های (۹) و (۱۰)، برای روش پاسخ تحلیلی به ازای Δt برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه مقداری قید نگردیده است.



شکل (۹) میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف عددی برای Δt برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه تا ۰/۰۰۷ ثانیه-طبقه اول



شکل (۱۰) میانگین میانگین خطاهای روش های مختلف عددی برای Δt برابر با ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه - طبقه دوم

۵-۲- بررسی مقادیر میانگین کلی روش های مختلف عددی

از مقادیر میانگین خطای بدست آمده از نرم افزار متلب، به ازای Δt های مختلف، میانگین گرفته شده و برای PGAهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه، نتایج برای طبقات اول و دوم به ترتیب صعودی در جداول (۱) و (۳) آورده شده است.

در انتها مجدداً از این مقادیر به دست آمده، میانگین گرفته شده و نتایج آن به ترتیب صعودی در جداول رتبه بندی (۲) و (۴) قرار داده شده است.

جدول (۱) میانگین خطای طبقه اول به ازای هشت روش مورد بررسی به ترتیب صعودی برای PGA های مختلف

مقادیر میانگین میانگین خطای طبقه اول								PGA (m/s ²)
روش ویلسون تتا	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۳ تابع حداقل مربعات	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۲ تابع حداقل مربعات	روش پاسخ تحلیلی	۱
$2/119 \times 10^{-4}$	$1/804 \times 10^{-4}$	$1/737 \times 10^{-4}$	$1/403 \times 10^{-4}$	$7/379 \times 10^{-5}$	$7/376 \times 10^{-5}$	$7/361 \times 10^{-5}$	$7/329 \times 10^{-5}$	

۲	روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تتا
	$1/544 \times 10^{-4}$	$1/5581 \times 10^{-4}$	$1/5589 \times 10^{-4}$	$1/5593 \times 10^{-4}$	$2/438 \times 10^{-4}$	$3/133 \times 10^{-4}$	$3/284 \times 10^{-4}$	$3/752 \times 10^{-4}$
۳	روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تتا
	$2/426 \times 10^{-4}$	$2/427 \times 10^{-4}$	$2/4308 \times 10^{-4}$	$2/435 \times 10^{-4}$	$3/411 \times 10^{-4}$	$4/384 \times 10^{-4}$	$4/678 \times 10^{-4}$	$5/331 \times 10^{-4}$
۴	روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تتا
	$3/055 \times 10^{-4}$	$3/090 \times 10^{-4}$	$3/094 \times 10^{-4}$	$3/093 \times 10^{-4}$	$4/374 \times 10^{-4}$	$5/424 \times 10^{-4}$	$5/862 \times 10^{-4}$	$6/519 \times 10^{-4}$
۵	روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تتا
	$3/947 \times 10^{-4}$	$3/982 \times 10^{-4}$	$3/9872 \times 10^{-4}$	$3/986 \times 10^{-4}$	$5/290 \times 10^{-4}$	$6/549 \times 10^{-4}$	$7/224 \times 10^{-4}$	$7/859 \times 10^{-4}$

جدول (۲) رتبه بندی میانگین خطای روش های مختلف برای طبقه اول به ترتیب صعودی، به ازای PGA های مختلف به ترتیب صعودی

مقادیر میانگین میانگین میانگین خطای طبقه اول								PGA (m/s ²)
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون تتا	۱-۵
$2/341 \times 10^{-4}$	$2/359 \times 10^{-4}$	$2/361 \times 10^{-4}$	$2/362 \times 10^{-4}$	$2/383 \times 10^{-4}$	$4/245 \times 10^{-4}$	$4/517 \times 10^{-4}$	$5/116 \times 10^{-4}$	
۱	۱/۰۰۸	۱/۰۰۹	۱/۰۰۹	۱/۴۴۵	۱/۸۱۴	۱/۹۵۲	۲/۱۸۶	

مقادیر میانگین میانگین خطای طبقه دوم								PGA (m/s ²)
۱	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون تنا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$1/0.16 \times 10^{-4}$	$3/252 \times 10^{-4}$	$3/4535 \times 10^{-4}$	$3/454 \times 10^{-4}$	$3/456 \times 10^{-4}$	$3/458 \times 10^{-4}$	$3/458 \times 10^{-4}$	$3/459 \times 10^{-4}$
۲	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون تنا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$2/0.32 \times 10^{-4}$	$6/504 \times 10^{-4}$	$6/907 \times 10^{-4}$	$6/908 \times 10^{-4}$	$6/913 \times 10^{-4}$	$6/9168 \times 10^{-4}$	$6/9168 \times 10^{-4}$	$6/917 \times 10^{-4}$
۳	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون تنا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$3/0.48 \times 10^{-4}$	$9/756 \times 10^{-4}$	$1/0.59 \times 10^{-3}$	$1/0.362 \times 10^{-3}$	$1/0.369 \times 10^{-3}$	$1/0.37 \times 10^{-3}$	$1/0.375 \times 10^{-3}$	$1/0.375 \times 10^{-3}$
۴	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون تنا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب
	$4/0.63 \times 10^{-4}$	$1/301 \times 10^{-3}$	$1/3811 \times 10^{-3}$	$1/3816 \times 10^{-3}$	$1/3826 \times 10^{-3}$	$1/3832 \times 10^{-3}$	$1/38347 \times 10^{-3}$	$1/38349 \times 10^{-3}$
۵	روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون تنا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز
	$5/0.80 \times 10^{-4}$	$1/626 \times 10^{-3}$	$1/7268 \times 10^{-3}$	$1/7271 \times 10^{-3}$	$1/7282 \times 10^{-3}$	$1/7292 \times 10^{-3}$	$1/7292 \times 10^{-3}$	$1/7293 \times 10^{-3}$

جدول (۳) میانگین خطای طبقه دوم به ازای هشت روش مورد بررسی به ترتیب صعودی برای PGA های مختلف

جدول (۴) رتبه بندی میانگین خطای روش های مختلف برای طبقه دوم به ترتیب صعودی، به ازای PGA های مختلف

مقادیر میانگین میانگین خطای طبقه دوم								PGA (m/s ²)
روش تفاضل مرکزی	روش پاسخ تحلیلی	روش ویلسون تنا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	

$1/0.376 \times 10^{-3}$	$1/0.375 \times 10^{-3}$	$1/0.374 \times 10^{-3}$	$1/0.37 \times 10^{-3}$	$1/0.362 \times 10^{-3}$	$1/0.359 \times 10^{-3}$	$9/756 \times 10^{-4}$	$3/0.48 \times 10^{-4}$	۱-۵
۳/۴۰۵	۳/۴۰۴	۳/۴۰۴	۳/۴۰۲	۳/۴۰۰	۳/۳۹۹	۳/۲۰۱	۱	

۵-۳- بررسی مقادیر ضریب تغییرات روش های مختلف عددی

در نظریه آمار و احتمال، ضریب تغییرات^۳ که مخفف آن (CV) است، یک معیار بدون بعد است که برای اندازه گیری توزیع داده های آماری به کار می رود که از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می آید. به عبارت دیگر ضریب تغییرات، میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین را بیان می کند. معمولاً ضریب تغییرات را در عدد ۱۰۰ ضرب می کنند تا عدد نهایی بر حسب درصد به دست بیاید. از ضریب تغییرات برای مقایسه پراکندگی دو یا چند صفت (متغیر) استفاده می کنند و کاربرد اصلی آن، مقایسه ی متغیرهایی است که واحدهای سنجش متفاوتی دارند. این شاخص تنها برای سطح سنجش نسبی کاربرد دارد.

از مقادیر ضریب تغییرات خطای بدست آمده از نرم افزار متلب، به ازای Δt های مختلف، میانگین گرفته شد و برای PGA های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ متر بر مجذور ثانیه، نتایج برای طبقات اول و دوم به ترتیب صعودی در جداول (۵) و (۷) آورده شده است.

در انتها مجدداً از این مقادیر بدست آمده، میانگین گرفته شده و نتایج آن به ترتیب صعودی در جداول رتبه بندی (۶) و (۸) قرار داده شده است.

جدول (۵) میزان ضریب تغییرات خطا (بر حسب درصد) طبقه اول به ازای هشت روش مورد بررسی به ترتیب صعودی، برای PGA های مختلف

مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطای طبقه اول								PGA (m/s ²)
شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب متوسط	۱
۳۵۷/۲	۳۵۰/۶	۳۲۶/۵	۳۲۳/۹	۳۲۱/۰۲	۳۰۷/۹۷	۲۹۷/۵۴	۲۹۷/۳	
روش پاسخ تحلیلی	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	۲
۳۹۹/۴۸	۳۶۶/۵۵	۳۶۶/۱۷	۲۹۱/۸	۲۷۵/۳	۲۶۵/۴	۲۵۳/۲۶	۳۶۸/۶۵	

³ Coefficient of Variation

۳	روش نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	روش پاسخ تحلیلی
	۲۳۸/۷	۲۵۳/۴۸	۲۵۹/۸۶	۲۶۷/۰۴	۳۶۳/۱	۳۶۳/۱۸	۳۶۴/۲۴	۴۰۳/۰۱
۴	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب متوسط	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	روش پاسخ تحلیلی
	۲۲۲/۱۵۷	۲۳۶/۹۳۵	۲۳۷/۵۹۴	۲۴۸/۵۸۶	۳۵۲/۸۵۷	۳۵۲/۹۲۵	۳۵۴/۴۴۳	۳۸۵/۳
۵	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش نیومارک شتاب متوسط	روش جنینگز	روش پاسخ تحلیلی
	۳۴۷/۵۱	۳۴۶/۴۲	۲۲۹/۱	۲۳۶/۹	۲۳۷/۹	۲۳۸/۷	۳۴۶/۵	۳۷۹/۲

جدول (۶) رتبه بندی ضریب تغییرات خطا روش های مختلف برای طبقه اول به ترتیب صعودی، به ازای PGA های مختلف.

مقادیر میانگین میانگین ضریب تغییرات خطا طبقه اول								PGA (m/s ²)
روش نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش پاسخ تحلیلی	۱-۵
۲۵۲/۹۸	۲۵۴/۹۵	۲۶۳/۵۴	۲۷۳/۲۹	۳۵۰/۵۴	۲۵۲/۲۸	۲۵۷/۲۳	۳۸۳/۵۳	
۱	۱/۰۰۷۷	۱/۰۴۱۷	۱/۰۸۰۲	۱/۳۸۵	۱/۳۹۲	۱/۴۱۲	۱/۵۱۶	

جدول (۷) میزان ضریب تغییرات خطا طبقه دوم به ازای هشت روش مورد بررسی برای PGA های مختلف به ترتیب صعودی

مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطا طبقه دوم								PGA (m/s ²)
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۱
۶۵/۰۶	۶۵/۰۷	۶۵/۳۱	۶۵/۵۰	۶۵/۵۰۶	۶۵/۵۰	۷۳/۰۷	۲۱۳/۷۳	

۲	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی
	۶۵/۰۷	۶۵/۰۷۷	۶۵/۳۱۷	۶۵/۵۱	۶۵/۵۱	۶۵/۵۱۲	۷۲/۹۱	۲۱۳/۷۶
۳	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی
	۶۵/۰۷۸	۶۵/۰۸۴	۶۵/۳۲۴	۶۵/۵۰۴	۶۵/۵۱۸	۶۵/۵۱۸	۷۲/۹۲	۲۱۳/۷۸
۴	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی
	۶۵/۰۸۸	۶۵/۰۹۵	۶۵/۳۲۵	۶۵/۵۲۵۷	۶۵/۵۲۹۱	۶۵/۵۲۹	۷۲/۹۳	۲۱۳/۷۸۱
۵	روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی
	۶۵/۱۰۴	۶۵/۱۱۱	۶۵/۳۴۹	۶۵/۵۴	۶۵/۵۴	۶۵/۵۴۳	۷۲/۹۴۶	۲۱۳/۸۱

جدول (۸) رتبه بندی ضریب تغییرات خطا روش های مختلف برای طبقه دوم به ترتیب صعودی، به ازای PGA های مختلف.

مقادیر میانگین میانگین ضریب تغییرات خطا طبقه دوم								PGA (m/s)
روش ویلسون تتا	روش نیومارک شتاب خطی	روش نیومارک شتاب متوسط	شتاب مرتبه ۲(تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳(تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	روش پاسخ تحلیلی	روش تفاضل مرکزی	۱-۵
۶۵/۰۸۱	۶۵/۰۸۸	۶۵/۳۲۸	۶۵/۵۱۷	۶۵/۵۲۰	۶۵/۵۲۲	۷۲/۹۵۶	۲۱۳/۷۷	
۱	۱/۰۰۰۱۱	۱/۰۰۳۸	۱/۰۰۶۶	۱/۰۰۶۷	۱/۰۰۶۸	۱/۱۲۱	۳/۲۸۵	

در جدول (۹) و جدول (۱۰)، روابط مربوط به روند افزایش خطای روش های مختلف بر حسب گام زمانی برای طبقه اول و دوم آورده شده است. این روابط چندجمله ای های درجه ۳ و روابط توانی هستند که چندجمله ای ها، ضریب تعیین R^2 (بزرگتر و روابط توانی، ضریب R^2 کوچکتری دارند. این مقادیر، همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی شان دارند؛ به طوری که برابر یک یا بسیار نزدیک به عدد یک هستند.

⁴ R-squared correlation

ضریب تعیین یا ضریب تشخیص، یک معیار آماری است که نشان‌دهنده‌ی نسبت تغییرات توضیح داده شده توسط مدل به کل تغییرات مشاهده‌شده در داده‌ها است. به عبارت دیگر، ضریب تعیین نشان می‌دهد که چه مقدار از واریانس متغیر وابسته توسط متغیرهای مستقل در مدل توضیح داده شده است. مقدار R^2 بین ۰ تا ۱ متغیر است. هرچه این مقدار به ۱ نزدیک‌تر باشد، مدل توانایی بهتری در توضیح تغییرات داده‌ها دارد.

ردیف	نام روش	فرمول روند افزایش خطا	R^2
۱	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	$y = 2 \times 10^{-6}x^{3.1208}$	$9/982 \times 10^{-1}$
		$y = -7 \times 10^{-7}x^3 + 6 \times 10^{-6}x^2 + 7 \times 10^{-5}x - 8 \times 10^{-5}$	$8/096 \times 10^{-1}$
۲	روش شتاب مرتبه سوم (تابع حداقل مربعات)	$y = 2 \times 10^{-6}x^{3.1318}$	$9/989 \times 10^{-1}$
		$y = -9 \times 10^{-7}x^3 + 8 \times 10^{-6}x^2 + 6 \times 10^{-5}x - 7 \times 10^{-5}$	$8/126 \times 10^{-1}$
۳	روش نیومارک شتاب متوسط	$y = 1 \times 10^{-5}e^{0.6471x}$	$9/852 \times 10^{-1}$
		$y = -7 \times 10^{-6}x^3 + 7 \times 10^{-5}x^2 - 8 \times 10^{-5}x + 2 \times 10^{-5}$	$5/923 \times 10^{-1}$
۴	روش نیومارک شتاب خطی	$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.9028}$	$9/747 \times 10^{-1}$
		$y = -3 \times 10^{-6}x^3 + 1 \times 10^{-5}x^2 + 0.0002x - 0.0002$	$7/431 \times 10^{-1}$
۵	روش ویلسون	$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.9732}$	$9/823 \times 10^{-1}$
		$y = 8 \times 10^{-7}x^3 - 2 \times 10^{-5}x^2 + 0.0003x - 0.0003$	$8/794 \times 10^{-1}$
۶	روش تفاضل مرکزی	$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.27}$	$9/878 \times 10^{-1}$
		$y = -6 \times 10^{-6}x^3 + 6 \times 10^{-5}x^2 + 3 \times 10^{-5}x - 9 \times 10^{-5}$	$7/544 \times 10^{-1}$
۷	روش جینگز	$y = 2 \times 10^{-6}x^{3.1315}$	$9/989 \times 10^{-1}$
		$y = -9 \times 10^{-7}x^3 + 8 \times 10^{-6}x^2 + 6 \times 10^{-5}x - 7 \times 10^{-5}$	$8/121 \times 10^{-1}$
۸	روش پاسخ تحلیلی	$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.4976}$	$1/00$
		$y = 4 \times 10^{-7}x^3 - 1 \times 10^{-5}x^2 + 0.0001x - 0.0002$	$9/712 \times 10^{-1}$

فرمول این شاخص به صورت زیر است:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{\sum(Y_t - \bar{Y})^2} \quad (24)$$

که در آن $\sum(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2$ ، تغییرات توضیح داده شده در Y و $\sum(Y_t - \bar{Y})^2$ برابر با کل تغییرات در Y است.

جدول (۹) روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی برای طبقه اول ($x \equiv \Delta t$).

ردیف	نام روش	فرمول روند افزایش خطا	R^2
۱	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5496}$	$7/139 \times 10^{-1}$
۲	روش شتاب مرتبه سوم (تابع حداقل مربعات)	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5496}$	$7/139 \times 10^{-1}$
۳	روش نیومارک شتاب متوسط	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}e^{0.7134x}$	$7/125 \times 10^{-1}$
۴	روش شتاب نیومارک شتاب خطی	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/742 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5473}$	$7/138 \times 10^{-1}$
۵	روش ویلسون	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5482}$	$7/138 \times 10^{-1}$
۶	روش تفاضل مرکزی	$y = 9 \times 10^{-6}x^3 - 9 \times 10^{-5}x^2 + 0.0003x - 0.0002$	$7/736 \times 10^{-1}$
		$y = 3 \times 10^{-5}x^{1.3082}$	$6/913 \times 10^{-1}$
۷	روش جینگز	$y = 3 \times 10^{-5}x^3 - 3 \times 10^{-4}x^2 + 0.0013x - 0.0011$	$7/743 \times 10^{-1}$
		$y = 2 \times 10^{-5}x^{2.5496}$	$7/139 \times 10^{-1}$
۸	روش پاسخ تحلیلی	$y = 7 \times 10^{-5}x^3 - 8 \times 10^{-4}x^2 + 0.0036x - 0.0042$	$8/265 \times 10^{-1}$
		$y = 7 \times 10^{-5}x^{1.6724}$	$7/141 \times 10^{-1}$

جدول (۱۰) روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی برای طبقه دوم ($x \equiv \Delta t$).

۶- نتیجه گیری

پاسخ جابه‌جایی یک سیستم دو درجه آزاد نرم شونده غیرخطی، تحت طیفی از بارگذاری های سینوسی با فرکانس‌های مختلف و به ازای PGAهای متفاوت مورد بررسی گرفت و مقادیر میانگین خطا و ضریب تغییرات خطا برای طبقه اول و دوم و رتبه بندی آنها در بخش ۱۰ آورده شده است.

نتایج بررسی‌ها نشان داد که در طبقه اول با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداقل مقدار میانگین خطا مربوط به روش پاسخ تحلیلی و نیومارک شتاب متوسط و حداکثر مقدار میانگین خطا در اکثر موارد مربوط به روش تفاضل مرکزی و ویلسون می‌باشد.

در طبقه دوم با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداقل مقدار میانگین خطا مربوط به روش تفاضل مرکزی و حداکثر مقدار میانگین خطا در اکثر موارد مربوط به روش جینگز می باشد.

در مورد ضریب تغییرات، در طبقه اول با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداکثر مقدار ضریب تغییرات خطا مربوط به روش های شتاب مرتبه ۲ و ویلسون و حداقل مقدار ضریب تغییرات خطا در اکثر موارد مربوط به روش نیومارک شتاب خطی و روش نیومارک شتاب متوسط می باشد.

در طبقه دوم با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۰۷ ثانیه در اکثر موارد حداکثر مقدار ضریب تغییرات خطا مربوط به روش تفاضل مرکزی و حداقل مقدار ضریب تغییرات خطا در اکثر موارد مربوط به روش ویلسون می باشد. در هر دو طبقه، میانگین و ضریب تغییرات خطا در روش شتاب مرتبه ۲ و روش شتاب مرتبه ۳ عموماً تفاوت جزئی داشتند.

در مجموع در طبقه اول روش پاسخ تحلیلی، کمترین میانگین خطا و روش ویلسون بیشترین میانگین خطا را داشت و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ در رتبه های دوم و چهارم قرار داشتند.

در طبقه دوم، روش تفاضل مرکزی، کمترین میانگین خطا و روش جینگز بیشترین میانگین خطا را داشت و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ به ترتیب در رتبه های ششم و هفتم قرار داشتند.

از لحاظ ضریب تغییرات، در طبقه اول بیشترین مقدار ضریب تغییرات مربوط به روش پاسخ تحلیلی و کمترین مقدار آن مربوط به روش نیومارک شتاب متوسط می باشد و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ به ترتیب در رتبه های ششم و هفتم قرار داشتند.

در طبقه دوم بیشترین مقدار ضریب تغییرات مربوط به روش تفاضل مرکزی و کمترین مقدار آن مربوط به روش ویلسون می باشد و روش های شتاب مرتبه ۲ و شتاب مرتبه ۳ به ترتیب در رتبه های چهارم و پنجم قرار داشتند.

۶-۱-پیشنهادهات

موارد زیر برای ادامه ی مسیر این تحقیقات، پیشنهاد می شوند:

- ۱- بررسی اثرات مختلف پارامترها: بررسی اثر تغییر پارامترهایی مانند نوع المان یا ضریب میرایی.
- ۲- مطالعه درباره شرایطی که روش شتاب مرتبه ۳ در آنها پایدار است یا ممکن است ناپایدار شود.
- ۳- کاربردهای خاص: می توان روش های مقایسه شده را برای کاربردهای خاصی از سیستم های غیر خطی مورد بررسی قرار داد برای مثال سیستم دینامیکی سازه ای مانند پل ها یا سیستم های مکانیکی مانند ربات ها یا قطعات متحرک پیچیده .
- ۴- استفاده از سیستم های با اصطکاک و میرایی.
- ۵- شبیه سازی با استفاده از نرم افزار ABAQUS.

- [1] A. A. Gholampour, M. Ghasemiye, and H. Fallahnejad, "**Direct Time Integration Method for Nonlinear Structural Problems**," in Proc. 6th Nat. Congr. Civil Eng., Semnan Univ., Semnan, Iran, 2011. (in Persian).
- [2] M. Ghasemiye and M. Karimirad, "**Time integration of dynamic structural problems using the Newmark acceleration method**," J. Civil Eng. and Surveying, vol. 45, pp. 35-43, 2011. (in Persian).
- [3] A. A. Gholampour and M. Ghassemieh, "**New Practical Approach to Nonlinear Dynamic Analysis of Structures: Refinement of Newmark's and Wilson's Classical Methods**," Practice Periodical on Structural Design and Construction, vol. 17, pp. 30-34, 2012.
- [4] A. A. Gholampour and M. Ghassemieh, "**A weighted residual quadratic acceleration time integration method in nonlinear structural dynamics**," in Proc. 2nd Int. Conf. Computer Research and Development (ICAPM), Kuala Lumpur, Malaysia, 2010.
- [5] M. Mahmoodabadi, B. Taghavi, S. M. R. Hassani, and S. M. J. Hosseini, "**Improvement of the Jennings method using spline interpolation function for numerical calculation of the response coefficient of linear single-degree-of-freedom systems**," J. Earthquake Sci. and Eng., Online publ., 2023. (in Persian).
- [6] M. Mahmoodabadi, B. Tagvi, S. M. R. Hassani, and S. M. J. Hosseini, "**Comparison of pseudo-acceleration spectrum obtained from linear interpolation of excitation with pseudo-acceleration spectrum obtained from interpolation with cubic spline function**," J. Struct. and Constr. Eng., 2023. (in Persian).
- [7] M. Mahmoodabadi and S. M. J. Hosseini, "**Comparison of the nonlinear response spectra of elastoplastic systems resulting from two stimulation interpolation methods**," Imran Ferdowsi Eng. Publ., Online publ., Nov. 23, 2023. (in Persian).
- [8] M. Mahmoodabadi, F. Hatefi Ardakani, and F. Ansari, "**Quantitative comparison of the accuracy of the 3rd order numerical acceleration method with other numerical methods**," Imran Ferdowsi Eng. Publ., Online publ., Jul. 21, 2024. (in Persian).
- [9] M. Mahmoodabadi, F. Ansarii, and F. Hatefi, "**A Quantitative Analysis of the Accuracy of the 3rd-Order Accelerating Method Compared to Other Numerical Techniques for Harmonical Loading – A Case Study of a Stiffening One-Degree-of-Freedom Structure**," J. Earthquake Sci. and Eng., Online publ., Oct. 21, 2024. (in Persian).
- [10] S. Y. Chang, "**Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method**," J. Mechanics, vol. 25, no. 3, pp. 289-297, 2009.
- [11] A. Chopra, Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2017.
- [12] N. C. Nigam and P. C. Jennings, Digital Calculation of Response Spectra from Strong-motion Records. Pasadena, CA: California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory, 1968.
- [13] N. C. Nigam and P. C. Jennings, "**Calculation of Response Spectra from Strong-motion Earthquake Records**," Bull. Seismol. Soc. Am., vol. 59, no. 2, pp. 909-922, 1968.

¹ Chang² Matlab

³ Coefficient of Variation

⁴ R-squared correlation

نسخه خلاصه