

تحلیل ارتعاش آزاد جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی بدون اثر مخزن به روش گالرکین

بهرام نوائی نیا، استاد دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

پست الکترونیکی: navayi@nit.ac.ir

چکیده:

در این پژوهش، تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی بدون احتساب اثر مخزن با استفاده از دو نظریه تیر اویلر-برنولی و تیر رایلی با نیمرخ متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیر در فضای فرکانسی از روش گالرکین استفاده شده است. به منظور متناهی شدن انتگرال مانده وزنی، شکل مود نامیرای سازه متناظر با نیمرخ ثابت به عنوان توابع قیاسی انتخاب شده است. به منظور تامین شرط پیوستگی، ماتریس‌های جرم و سختی به شکل ضعیف بیان گردیدند که براساس آن دترمینان ماتریس سختی دینامیکی تعیین و به کمک آن معادله مشخصه و مقدارهای ویژه به دست می‌آیند. برای صحت‌سنجی روش حاضر، پاسخ‌های نهایی با روش‌های تحلیلی مقایسه شده است. پس از اطمینان از دقت روش، دو نظریه مورد بررسی در تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. مقایسه نتایج به وضوح نشان می‌دهد که برای بسامدهای بالاتر سدهای بتنی وزنی، استفاده از نظریه اویلر-برنولی باعث خطای قابل توجهی می‌شود و استفاده از نظریه رایلی ضروری است.

واژگان کلیدی:

سدهای بتنی وزنی، ارتعاش آزاد، نظریه اویلر-برنولی، نظریه رایلی، روش گالرکین.

Transversely and Axial Free Vibration Analysis of Concrete Gravity Dam without Reservoir effect using Galerkin Method

Abstract:

In this study, transverse and axial free vibration analysis of Concrete Gravity Dams is presented. To achieve ordinary differential equations, the undamped governing partial differential equation of vibration of a tapered cantilever beam, based on Euler-Bernuli and Rayleigh theories are transformed to the frequency domain. Galerkin method is then used to solve the free vibration equation for an arbitrary dam geometry. The restrictions that need to be placed on the admissible functions to avoid the infinite terms in the integrals of equations depend on the order of implied differential operators. The corresponding undamped mode shapes of Euler-Bernoulli and Rayleigh beams, which satisfy essential boundary conditions, are chosen as the admissible functions to expand the trial response of the equation of motion. Validation of results shows

an excellent agreement between the Galerkin method and exact solutions in this research. Numerical results of free frequency vibration for different cases based on Rayleigh and Euler-Bernoulli theories show that the frequencies of the dam do not match due to the thickness of dams, especially in higher modes. The predicted values of natural frequencies of the dam based on Rayleigh's theory are less than the values predicted by Euler-Bernoulli's theory due to the consideration of rotary inertia effect, which becomes significant in very thin dams.

Keywords: Concrete Gravity Dams, Free Vibration, Euler-Bernoulli Theory, Rayleigh Theory, Galerkin Method.

۱- مقدمه

بتنی وزنی شبیه‌سازی آنها به صورت یک تیر طره می‌باشد که در صورت صلب یا انعطاف‌پذیر بودن بستر به ترتیب به صورت گیردار یا فنر معادل تحلیل می‌شود. بنابراین سابقه تحلیل این سازه‌ها به قدمت شبیه‌سازی تیرها باز می‌گردد. تیرها به عنوان یکی از اجزای بسیار متداول سازه‌ای با رفتار یک‌بعدی به دلیل کاربرد بسیار وسیع‌شان در زیرشاخه‌های مختلف مهندسی همواره مورد توجه طراحان و پژوهشگران بوده است. این سازه‌ها بر اساس هندسه خود به تیرهای یکنواخت و غیریکنواخت یا غیرمنشوری و نیز تیرهای ضخیم و نازک طبقه‌بندی می‌شوند. تیرهای غیریکنواخت در شاخه‌های مختلف مهندسی کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده‌اند که به عنوان نمونه می‌توان از پل‌ها، سدهای بتنی وزنی، پره توربین‌ها و هلی‌کوپترها نام برد. این تیرها دارای مساحت و ممان اینرسی متغیری می‌باشند که تغییرات آن می‌تواند به صورت پیوسته یا غیرپیوسته باشند. این نوع از تیرها ضمن اینکه از نظر زیبایی‌شناختی مورد توجه معماران می‌باشد، به دلیل توزیع غیریکنواخت جرم و مقاومت، متناسب با نوع بارگذاری در برخی سازه‌ها جایگزین تیرهای یکنواخت گردیده تا ضمن اقتصادی بودن، وظایف سازه‌ای مشخص‌تری را در تامین نیازهای مهندسی عهده‌دار باشند. براساس ویژگی‌های مطرح شده، سدهای بتنی وزنی نیز به صورت تیرهای با نیمرخ قائم یا عرضی غیریکنواخت طراحی می‌شوند که در آن از تاج سد به سمت کف سد ضخامت افزایش می‌یابد تا بدین ترتیب نیازهای مقاومتی و نیز سختی به‌طور مناسب‌تری در ارتفاع سد تامین گردد. تغییرات نیمرخ سدهای بتنی در ارتفاع البته پیچیدگی‌های محاسباتی خود را به روش‌های تحلیل ارتعاش آزاد تحمیل می‌نماید.

سدهای بتنی وزنی در ارتفاع خود دارای ضخامت متغیر می‌باشند که به شکل آرمانی می‌توان آن را به‌مانند تیر غیریکنواخت مثلی با نیمرخ عرضی مستطیلی در نظر گرفت که مطابق شکل ۱ در راس یا تاج خود برای دسترسی و نیز تامین ارتفاع آزاد Δh دارای بخش فوقانی به جرم m می‌باشد که از آن به عنوان جرم فوقانی یاد می‌گردد. این سدها به دلیل هندسه ساده و به تبع آن سادگی در محاسبات و نیز اجرا از دیرباز مورد توجه بسیاری از طراحان و مجریان قرار داشته است. با پیشرفت روش‌های محاسباتی و اجرایی، از نیمه دوم سده بیستم میلادی احداث سدهای بتنی وزنی در قیاس با انواع دیگر سدهای بتنی و غیربتنی توجیه اقتصادی کمی داشت و به تدریج جایگاه خود را به ویژه در رقابت اقتصادی از دست داد و کمتر مورد توجه قرار گرفت. اما با معرفی سدهای بتن غلتکی کوبیده در دهه هشتم سده بیستم میلادی که می‌توان آن را گونه‌ای از سدهای بتنی وزنی دانست، تحولی شگرف در طراحی و اجرای سدهای بتنی وزنی به وجود آمد و سبب شد این نوع از سدها مجدداً مورد توجه قرار گیرند. مستقل از این که سدهای بتنی وزنی از نوع بتن معمولی یا بتن غلتکی کوبیده باشد، روش‌های محاسباتی و تحلیل تنش-کرنش و ارتعاش آزاد آنها تا حد زیادی مشترک و شبیه هم است. لذا موضوع پژوهش حاضر که تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی است همچنان می‌تواند به عنوان موضوعی کاربردی مطرح باشد.

مسئله ارتعاش سدهای بتنی وزنی را همانند هرسازه‌ای می‌توان در گروه مسائل مقادیر ویژه و بردارهای ویژه قرار داد که از دیرباز بدلیل کاربرد وسیع آن مورد توجه پژوهشگران و طراحان قرار داشته است. ساده‌ترین نظریه در تحلیل سدهای

سابقه آشنایی انسان با پدیده ارتعاش آزاد و انتشار امواج به سابقه استفاده انسان از ادوات موسیقی برمی گردد. آزمایش-های گالیله (Galileo) در قرن شانزدهم میلادی روی پاندول و فنر مرتعش تحولی در اندازه گیری پارامترهای موثر بر ارتعاشات را پایه گذاری نمود که منجر به توسعه هرچه سریع تر این شاخه از علم گردید [1]. دالامبر (D'Alambert)، لاگرانژ (Lagrange)، اویلر (Euler) و برنولی (Bernoulli) گام های اساسی اولیه و در ادامه کار برخی دیگر پژوهشگران به تدوین نظریه های متداول تیرها منجر گردید.

اگر چه تحلیل تیرها نسبت به سایر اجزای نظیر صفحات و یا پوسته ها از پیچیدگی کمتری برخوردار می باشد، با این حال تحلیل تیرها با افزایش ضخامت سازه، متغیر بودن نیمرخ عرضی و نیز اضافه شدن پارامتر زمان در تحلیل دینامیکی و یا بررسی رفتار ارتعاش آزاد آنها به مراتب از پیچیدگی بسیار بیشتری در مقایسه با تیرهای یکنواخت در تحلیل استاتیکی برخوردار می باشد. در سازه های ضخیم به دلیل اهمیت کرنش برشی و پیچیدگی اثر آن در روابط و نیز اثر اینرسی دورانی، ارتعاش آزاد و یا تحلیل دینامیکی همچنان مورد توجه پژوهشگران می باشد. در بسیاری از آیین نامه ها و استانداردها تیرهای یکنواخت ضخیم یا عمیق با نسبت طول به ضخامت کمتر از حدود ۵ معرفی می گردد که در این صورت کرنش های برشی قابل چشم پوشی نمی باشد. در نظریه تیر اویلر-برنولی که به نظریه مقدماتی و نظریه مهندسی تیر نیز معروف می باشد، رفتار تیر فقط مبتنی بر حرکات خمشی تیرهای کشسان است که در آن اثر تغییر شکل برشی نادیده انگاشته می شود. علاوه بر این، در این نظریه، صفحات عمود بر تار خنثی درحین تغییر شکل همچنان مسطح و عمود بر تار خنثی باقی می مانند. با توجه به اهمیت تغییر شکل های برشی بر رفتار تیرهای عمیق، به کارگیری نظریه اویلر-برنولی برای این تیرها با خطای زیادی همراه است [۱]. این موضوع در تحلیل ارتعاش آزاد با افزایش ضخامت منجر به برآورد دست بالاتر بسامدهای طبیعی می گردد [۲]. به منظور رفع این مشکل، نظریه رایلی (Rayleigh) برای در نظر گرفتن اثر اینرسی دورانی و نیز نظریه تیموشنکو (Timoshenko) به منظور احتساب توام اینرسی دورانی و کرنش برشی ارائه شده است.

کارهای بسیار متنوعی در خصوص تعیین ارتعاش آزاد سازه ها در حالت کلی و تیرها در حالت خاص صورت پذیرفته است. رایلی [2] در سال ۱۸۷۷ میلادی یک روش کلی برای تعیین فرکانس طبیعی یک سازه دلخواه ارائه داد که بعدها توسط ریتز (Ritz) [3] با فرض مجموعه ای از توابع فرضی قابل قبول که هر یک دارای ضریب مستقلی می باشند تکمیل شد. این روش که به روش رایلی-ریتز مشهور شده است، یکی از روش های وردشی متداول در تعیین پاسخ تقریبی ارتعاش سازه ها به حساب می آید. روش گالرکین که جز روش های مانده وزنی می باشد، در زمره روش های تقریبی می باشد که برخلاف روش رایلی و رایلی-ریتز در بررسی سیستم های ناپاستار نیز مورد استفاده قرار می گیرد.

عمده کارهای صورت گرفته در تحلیل دینامیکی و یا ارتعاش آزاد تیرها به تیرهای نازک اختصاص داده شده است که در آنها تیرها با هندسه، شرایط تکیه گاهی و نیز بارگذاری متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر موضوعات اشاره شده، در سال های اخیر پژوهش ها به سمت مصالح نوین با ویژگی های متفاوت نظیر ناهمسانگردی و ناهمگنی، به مانند مصالح مدرج تابعی، سوق پیدا نموده که در سدهای بتنی البته هنوز موضوعیت چندانی ندارد.

در تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای مبتنی بر نظریه اویلر-برنولی، صرف نظر نمودن از کرنش های برشی منجر به رسیدن به مقادیر بزرگتر بسامدهای ارتعاش آزاد در تیرهای ضخیم تر به ویژه در مودهای بالاتر می گردد که اعتبار این نظریه را تحت تاثیر قرار می دهد. مرور پژوهش های پیشین آشکارا نشان می دهد که پژوهشگران کمتر به بررسی مساله ارتعاش تیرهای غیر یکنواخت پرداخته اند. دلیل عمده این موضوع را می توان به پیچیدگی تحلیل تیرهای غیر یکنواخت ناشی از وجود ضرایب متغیر حاصل از تغییرات مساحت و ممان اینرسی در معادله دیفرانسیل حاکم نسبت داد. به دلیل وجود این ضرایب متغیر، تعیین جواب تحلیلی به جز در موارد خاص ممکن نیست. میبی (Mabie) و راجرز (Rogers) [4] معادله حاکم بر ارتعاش آزاد تیر طره اویلر-برنولی با نیمرخ غیر یکنواخت را توسعه دادند. در کار ایشان تغییرات نیمرخ تیر در ارتفاع و پلان به صورت خطی در نظر گرفته شده بود و اثر پارامترهای مختلف تغییرات نیمرخ مورد بررسی قرار گرفت. در پژوهشی

دیگر [5] ارتعاش تیر طره‌ای در دو حالت عرض ثابت و تغییرات خطی ضخامت و نیز ضخامت ثابت با تغییرات خطی عرض مطالعه گردید. کارنگی و توماس (Carnegie & Thomas) [6] بسامدهای طبیعی و شکل مود ارتعاشی پره-های طره‌ای از پیش تحت پیچش قرار گرفته را بررسی کردند که در طراحی توربین‌ها و کمپرسورها اهمیت دارند. گل (Goel) ارتعاش جانبی تیرهای با ضخامت متغیر خطی را بررسی کرد که دو لبه آن‌ها با فنرهای پیچشی الاستیک مقید شده بود [7]. هیلر (Hibbler) ارتعاش تیرها با تکیه‌گاه‌های ترکیبی گیردار و مفصلی را بررسی نمود [8]. در پژوهشی دیگر لو (Lau) [9] بر اساس نظریه اویلر-برنولی پنج بسامد طبیعی اول تیره طره غیریکنواخت را با وجود یک جرم در انتهای آزاد بررسی نمود. چنین روش شبیه‌سازی در کار حاضر نیز برای اثر جرم فوقانی سدهای بتنی وزنی، شکل ۱، مورد توجه قرار گرفته است. ایس (Ece) و همکاران [10] ارتعاش آزاد تیر همسانگرد با نیمرخ عرضی متغیر با تغییرات نمایی را مورد بررسی قرار دادند. ایشان معادله حاکم را به یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب متغیرهای مکانی تقلیل دادند و پاسخ‌ها را برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف ارائه دادند. شهباء و همکاران (Shahba et al.) [11] ارتعاش آزاد و پایداری تیرهای مدرج تابعی را به روش تقریبی مورد بررسی قرار دادند. بانرجی و ویلیامز (Banerjee & Williams) [12] روشی تقریبی مبتنی بر روش تبدیل دیفرانسیلی برای تیر-ستون‌های غیریکنواخت مدرج تابعی محوری که دامنه تغییرات نیمرخ عرضی آن‌ها در محدوده متداول بود ارائه کردند. آربت (Arbate) [13] معادله حرکت تیرها و میله‌های غیریکنواخت را تحت شرایط خاصی به معادلات نظیر تیرهای یکنواخت تبدیل نمود که برای برخی تیرها قابل استفاده است و حل آن‌ها را تسهیل می‌نماید. ایس و آیدودی [14] معادله دیفرانسیل پاره‌ای تیرهای همسانگرد با تغییرات نمایی مساحت را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل نمودند تا امکان حل آن فراهم گردد. موی و همکاران (Mou et al.) [15] روشی تحلیلی برای ماتریس سختی دینامیکی تیرهای با نیمرخ غیریکنواخت دلخواه ارائه نمودند.

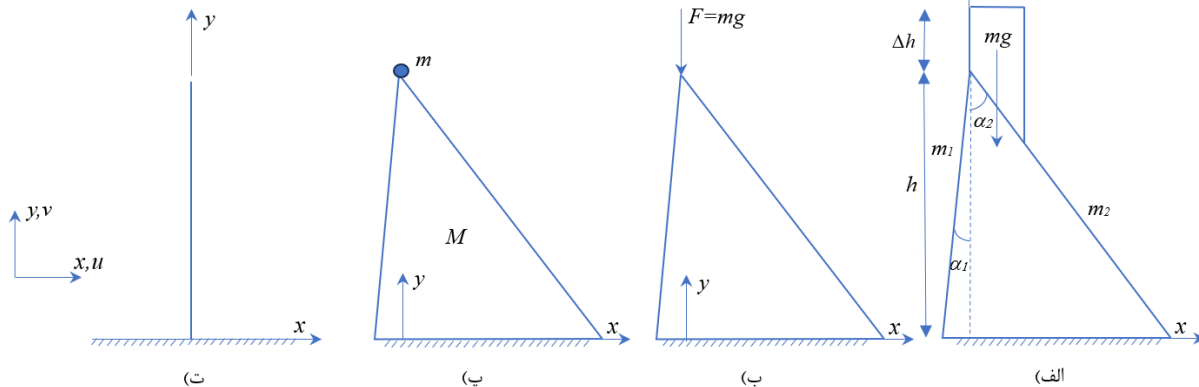
تحلیل ارتعاش آزاد سدهای بتنی به‌طور عمده به روش‌های عددی انجام گرفته است و روش‌های مبتنی بر پاسخ‌های

تحلیلی، براساس اطلاعات مولف، بسیار کم می‌باشد. پیچیدگی بطور نسبی هندسی سدها و نیز وجود مخزن و نیز بستر را می‌توان دلایل عمده در عدم امکان استفاده از روش-های تحلیلی برشمرد. فنوس و چوپرا (Fenvese & Chopra) در کار خود به طور مبسوط روش تعیین بسامد ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی را جهت به‌کارگیری در روش اجزای محدود در تحلیل اندرکنش سد و مخزن ارائه نمودند [16].

ایشان بر این اساس رابطه تقریبی $\omega_1 = 0.165 \frac{\sqrt{E}}{H}$ را برای برآورد بسامد زاویه‌ای ارتعاش آزاد سدهای بتنی اصطلاحاً استاندارد را پیشنهاد نمودند که در آن E مدول الاستیسیته بتن سد و H ارتفاع سد می‌باشد. ایشان سپس با اصلاحاتی اثر مخزن و بستر را بصورت تقریبی وارد نمودند. میگوئل و بوانانی (Miquel & Bouaanani) [17] نیز براساس روابط تقریبی فنوس و چوپرا و نیز در نظر گرفتن بخشی از آب مخزن از رابطه تقریبی در تعیین ارتعاش آزاد سد و مخزن بدون اثر بستر استفاده نمودند. استفاده از روش جرم افزوده نیز یکی از روش‌های تقریبی در نظر گرفتن اثر مخزن در تحلیل ارتعاش آزاد سد و مخزن می‌باشد که برخی از مراجع از جمله میگوئل و بوانانی بر اساس آن با برآورد تقریبی از بسامد ارتعاش آزاد سد مخزن سعی در تحلیل دینامیکی مجموعه سد مخزن بستر و نیز تعیین فشارهای هیدرودینامیکی نمودند. عطارنژاد و فرساد نیز روشی تحلیلی برای تعیین بسامد سدهای بتنی وزنی با نیمرخ متغیر پله‌ای در حل معادله حاکم بر تیرهای اویلر-برنولی ارائه نمودند [18]. عطارنژاد و قربانی-تنها (Attarnejad & Ghorbani-Tanha) [19] پاسخ معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم حاکم بر تیرها با نیمرخ متغیر را بر حسب توابع بسل توسعه دادند.

روش گالرکین یکی از روش‌های موثر و کارا در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد که در حوزه‌های مختلف مهندسی کاربرد وسیعی پیدا نموده است. در این روش، پاسخ معادله دیفرانسیل به صورت تابعی قیاسی در نظر گرفته می‌شود. با جای‌گذاری تابع فرضی در معادله دیفرانسیل حاکم، مانده وزنی حاصل با ضرب توابع قیاسی و انتگرال‌گیری در محدوده طول سد کمینه می‌گردد. برای مسائل مربوط به تیرها، صفحات و پوسته‌ها یکی از بهترین توابع قیاسی، مود ارتعاشی

در هر بخش روشی تحلیلی برای پاسخ ارتعاش جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی با تغییرات خطی ضخامت ارائه گردیده است. مقایسه نتایج حاصل از روش گالرکین در این پژوهش با پاسخ تحلیلی حاکی از دقت بسیار خوب روش گالرکین می‌باشد. در ادامه اثر جرم فوقانی سد به دو صورت نیرو و جرم متمرکز در راس سد مثلثی شکل و نیز تغییر در ضابطه تغییرات خطی نیمرخ سد با ضخامت ثابت جرم فوقانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. رابطه‌سازی با احتساب اثر مخزن و بررسی نتایج اثر آن در پژوهشی مجزا توسط نویسنده ارائه خواهد شد.



شکل ۱: نیمرخ قائم سد بتنی وزنی، الف) با جرم فوقانی، ب) با نیروی وزن معادل جرم فوقانی، پ) با جرم بخش فوقانی بصورت متمرکز، ت) تیریک‌سرگیردار و یک‌سر آزاد به همراه محوره‌های مختصات.

واحد حجم و ضریب کشسانی مصالح تیر؛ $I(y)$ و $A(y)$ به ترتیب ممان اینرسی حول محورخشی و مساحت تیر؛ $C(y)$ ضریب میرایی یا استهلاک مصالح؛ $P(y)$ نیروی محوری در نیمرخ افقی تیر و $q(y,t)$ نیز شدت بار خارجی جانبی را نشان می‌دهد که برای تحلیل ارتعاش آزاد صفر در نظر گرفته می‌شود. با فرض همگن بودن مصالح تیر در این پژوهش، جرم حجمی، ضرایب کشسانی و برشی مصالح ثابت است و به دلیل تاثیر کم اثر استهلاک، از اثر آن برسماد ارتعاش آزاد تیر صرف‌نظر می‌شود.

با فرض هارمونیک بودن ارتعاش به صورت $\bar{u}(y,t)=u(y)e^{i\omega t}$ که در آن u جابجایی تیر برحسب y ، $i=\sqrt{-1}$ و ω بسامد زاویه‌ای ارتعاش آزاد می‌باشد و جای‌گذاری آن در روابط (۱)

سازه می‌باشد. این روش به‌طور موفقیت آمیزی توسط مولف پژوهش حاضر و همکاران در تحلیل ارتعاش آزاد تیررایلی با میرایی ویسکوالاستیک غیرمحملی [20] و تحلیل ارتعاش آزاد ویسکوالاستیک تیرهای غیریکنواخت با میرایی غیرمحملی مصالح مدرج تابعی [21] به کار گرفته شده است. در این پژوهش تحلیل ارتعاش آزاد جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی بدون اثر مخزن به روش گالرکین ارائه می‌شود. با استفاده از شکل مود ارتعاش آزاد تیر طره یکنواخت به عنوان تابع فرضی، بسامد ارتعاش آزاد سدهای بتنی وزنی با نیمرخ متغیر و با تغییرات خطی در ارتفاع با تکیه بر نظریه‌های اوپلر-برنولی و رایلی تعیین می‌گردد. به منظور صحت سنجی، ابتدا

۲- معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی

معادله حاکم بر ارتعاش جانبی تیرهای مبتنی بر نظریه‌های اوپلر-برنولی و رایلی به ترتیب همانند رابطه‌های (۱) و (۲) بیان می‌شود [1].

$$(E\bar{u}'')'' + C\bar{u} - (P\bar{u}')' + \rho A\bar{u} = q \quad (1)$$

$$(E\bar{u}'')'' + C\bar{u} - (\rho I\bar{u}''')' - (P\bar{u}')' + \rho A\bar{u} = q \quad (2)$$

در روابط بالا، علامت‌های پریم و نقطه بر روی پارامترها به-ترتیب معرف مشتق‌های مکانی و زمانی؛ y مطابق شکل ۱ مختصه طولی تیر؛ t متغیر زمان؛ $\bar{u}(y,t)$ جابجایی جانبی در هر نقطه از تیر؛ $\rho(y)$ و $E(y)$ به ترتیب جرم

و (۲) معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیرها در دامنه بسامد به ترتیب برای نظریه‌های اویلر-برنولی و رایلی به مانند روابط (۳) و (۴) خواهد شد.

$$E(Iu'')'' - (Pu')' - \rho A \omega^2 u = 0 \quad (3)$$

$$E(Iu'')'' + \rho \omega^2 (Iu')' - (Pu')' - \rho A \omega^2 u = 0 \quad (4)$$

هر دو معادله دیفرانسیل فوق از مرتبه چهار و از نوع همگن خطی می‌باشد. برای حالتی که ممان اینرسی و مساحت متغیر باشد معادلات بالا با ضرایب متغیر نتیجه خواهد شد. معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر در غالب موارد حل به فرم بسته ندارند و در حالت کلی استفاده از روش‌های تقریبی در حل برخی از آنها به دلیل پیچیدگی معادلات یا اقناع شرایط مرزی اجتناب‌ناپذیر می‌شود. روش‌های متعددی برای تعیین بسامدهای ارتعاشی سازه‌ها و نیز شکل مود آن‌ها ارائه شده است که یکی از مطرح‌ترین آن‌ها روش رایلی-ریتز می‌باشد. روش رایلی-ریتز تنها برای سیستم‌های پایستار صادق است و مبتنی بر فرض تابع شکل مودی سازه می‌باشد. روش‌های باقیمانده وزنی که مبتنی بر بسط سری برای تابع جابجایی در حالت کلی و شکل مود در تحلیل ارتعاشی می‌باشد از این برتری متمایز نسبت به روش رایلی-ریتز برخوردار می‌باشد که برای سیستم‌های ناپایستار نیز قابل استفاده است. روش‌های باقیمانده وزنی بسیار شبیه به هم بوده که اهم آن‌ها شامل روش گالرکین، روش ترتیبی و روش کمترین مربعات می‌باشد. روش گالرکین که بعدها توسط پژوهشگران دیگری توسعه یافت، از جمله روش‌های موثر و کارا برای حل معادلات دیفرانسیل ارتعاش آزاد و حتی ارتعاش اجباری می‌باشد.

۲-۱- روش گالرکین

در روش گالرکین جواب یک معادله دیفرانسیل به مانند رابطه (۵) فرض می‌شود.

$$u = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(y) \quad (5)$$

که در آن c_j ضرایب ثابت و $\phi_j(y)$ توابع قیاسی را نشان می‌دهند. این توابع طوری انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی را اقناع کنند ولی لزوماً در معادله دیفرانسیل حاکم صدق

نخواهد کرد. در روش گالرکین چنانچه اختلاف یا مانده پاسخ دقیق معادله دیفرانسیل حاکم از تابع قیاسی رابطه (۵) با R نشان داده شود، در این صورت مطابق روش گالرکین رابطه (۶) باید برقرار باشد.

$$\int_0^h R \phi_k(y) dy = 0 \quad (6)$$

که در مساله ارتعاش تیرها h طول تیر و در این تحقیق ارتفاع سد را نشان می‌دهد. در حل مسائل ارتعاش آزاد، استفاده از رابطه اخیر منجر به مسئله مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌گردد که در آن ω_j بسامدهای ارتعاش آزاد یا مقادیر ویژه و c_j مودهای ارتعاشی سازه یا بردارهای ویژه می‌باشد.

۲-۲- تیر اویلر-برنولی

برای معادله تیر مبتنی بر نظریه اویلر-برنولی با استفاده از تابع قیاسی و رابطه (۵) و جای‌گذاری آن در معادله دیفرانسیل (۳) و بدون اثر نیروی محوری، تابع باقیمانده از رابطه (۷) تعیین می‌شود.

$$R = -\omega^2 \rho A \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + E \sum_{j=1}^N c_j [I \phi_j'']'' \quad (7)$$

برای صفر شدن مانده وزنی اخیر با بهره‌گیری از رابطه (۶) رابطه (۸) نتیجه خواهد شد.

$$\sum_{j=1}^n c_j (-\omega^2 \rho \int_0^h A \phi_j \phi_k dy + E \int_0^h [I \phi_j'']'' \phi_k dy) = 0 \quad (8)$$

بنابراین ضرایب ماتریس سختی k_{jk} و جرم m_{jk} به شکل رابطه (۹) به دست می‌آید.

$$k_{jk} = E \int_0^h [I \phi_j'']'' \phi_k dy, \quad m_{jk} = \rho \int_0^h A \phi_j \phi_k dy \quad (9)$$

با توجه به رابطه (۹)، رابطه (۸) به شکل رابطه (۱۰) قابل بازنویسی می‌باشد.

$$\omega^2 \sum_{j=1}^N m_{jk} c_j + \sum_{j=1}^N k_{jk} c_k = 0, \quad k=1,2,\dots,N \quad (10)$$

به این ترتیب شکل ماتریسی معادله حاکم بر ارتعاش تیر به صورت رابطه (۱۱) می‌باشد.

$$-\omega^2 [m] \bar{c} + [k] \bar{c} = 0 \quad (11)$$

معادله (۱۱) شکل استاندارد مسئله مقدار ویژه است و برای جواب غیربدیهی باید دترمینان عبارت $\lambda^2[m]+[k]=0$ برابر صفر قرار گیرد. با استفاده از معادله مشخصه حاصل، ابتدا مقدارهای ویژه یا بسامدهای طبیعی، ω ، تعیین می‌شوند، سپس با کمک رابطه (۱۱) مقدارهای ویژه یا شکل مود ارتعاشی سد، بردار $\vec{C}$ ، به دست می‌آید. بردارهای ویژه به روش‌های به‌طورنسبی ساده ریاضی تعیین می‌گردد که از بیان جزییات آن در این مقاله خودداری می‌گردد.

برای تعیین مقدارهای ویژه لازم است توابع قیاسی مناسبی برای رابطه (۵) انتخاب شوند. بدین منظور از شکل مود ارتعاش آزاد تیرهای یکنواخت استفاده می‌شود که شرایط مرزی مسئله را اقلان می‌کنند. مود ارتعاش تیر طره یکنواخت با حل معادله دیفرانسیل (۳) بدون احتساب نیروی محوری و اعمال شرایط مرزی $u(0)=u'(0)=0$ ، شکل ۱، رابطه (۱۲) را نتیجه می‌دهد [1].

$$\phi_j(y) = \cos(\beta_j y) - \cosh(\beta_j y) - \quad (12)$$

$$A_j (\sin(\beta_j y) - \sinh(\beta_j y))$$

که در آن A_j از رابطه (۱۳) تعیین می‌گردد.

$$A_j = (\cos(\beta_j h) + \cosh(\beta_j h)) / \quad (13)$$

$$(\sin(\beta_j h) + \sinh(\beta_j h))$$

برای تعیین $\beta_j h$ نیز می‌توان از دو شرط مرزی $u''(h)=u'''(h)=0$ استفاده کرد. از برابر صفر قراردادن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات حاصله، معادله بسامدی (۱۴) حاصل می‌شود.

$$\cos(\beta_j h) \cdot \cosh(\beta_j h) + 1 = 0 \quad (14)$$

با حل معادله (۱۴) مقدار $\beta_j h$ تعیین می‌گردد و به کمک آن شکل مود ارتعاشی در رابطه (۱۲) تعیین می‌گردد. براین اساس ده ریشه اول یا ده مود اول نوسان تعیین گردیده و در جدول (۱) ارائه شده است.

در حالت کلی، توابع وزنی باید به گونه‌ای در نظر گرفته شوند که انتگرال مانده وزنی به واسطه آن‌ها نامتناهی نشود. علاوه براین محدودیت‌هایی که در انتخاب نوع تابع وجود دارد،

وابسته به مرتبه مشتق معادلات حاکم است. اگر معادلات حاکم و یا شرایط مرزی، از مشتق مرتبه m ام باشد، تابع وزنی باید طوری انتخاب می‌شود که مشتق مرتبه $m-1$ آن در بازه انتگرال‌گیری پیوسته بماند. به این منظور به‌طورمعمول با انتگرال‌گیری جز به جز، می‌توان مرتبه عملگر مشتق را کاهش داد. در نتیجه، پیوستگی مرتبه پایین‌تری برای تابع وزنی نیاز خواهد بود. به چنین حالتی شکل ضعیف معادله می‌گویند که از نظر فیزیکی نیز بهتر می‌توان آن را درک کرد. رابطه (۱۵) انتگرال‌گیری جز به جز در حالت یک بعدی را برای دو تابع دل‌خواه ϕ و φ نشان می‌دهد.

$$\int_0^h \phi d\varphi = - \int_0^h \varphi d\phi + [\phi\varphi]_0^h \quad (15)$$

با توجه به انتگرال رابطه سختی در رابطه (۹)، شکل ضعیف آن به کمک رابطه (۱۵) به صورت رابطه (۱۶) بازنویسی می‌شود.

$$k_{jk} = -E \int_0^h (I \phi_j'')' \phi_k'' dy + \quad (16)$$

$$E (I(h) \phi_j''(h))' \phi_k''(h) - E (I(0) \phi_j''(0))' \phi_k''(0)$$

با توجه به شرایط مرزی تیر مورد بررسی، مقادیر تابع ϕ در مرزها به صورت $\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(h)=\phi'''(h)=0$ می‌باشد. استفاده مجدد انتگرال‌گیری جز به جز برای رابطه (۱۶) و اعمال شرایط مرزی مربوط، درایه‌های ماتریس سختی به صورت رابطه (۱۷) بیان می‌شود.

$$k_{jk} = +E \int_0^h I \phi_j'' \phi_k'' dy \quad (17)$$

۲-۳- اثر وزن جرم فوقانی و بدنه سد

چنانچه در رابطه (۳) اثر نیروی محوری یا وزن سازه، که در سدهای بتنی قابل توجه بوده و عامل پایداری سد محسوب می‌شود، نیز در نظر گرفته شود در این صورت اثر جمله (Pu') که در آن نیروی فشاری با علامت منفی در روابط تعریف گردیده است نیز باید در نظر گرفته شود. در تحلیل سدهای بتنی وزنی متعارف اثر وزن را، مطابق شکل ۱، به دو شکل اثر وزن جرم فوقانی به صورت نیروی متمرکز $P_0=mg$ در راس مثلث یا تاج بخش مثلثی و نیز وزن بخش مثلثی که به صورت

P - تعریف می‌گردد می‌توان در نظر گرفت که در آن m جرم جرم فوقانی می‌باشد. در این صورت با توجه به فشاری بودن این نیروها، مجموع اثر وزن جرم فوقانی و وزن بدنه سد به صورت $P(y) = -P_0 - R(y)$ قابل بیان و در این صورت رابطه (۱۰) با احتساب نیروی محوری به مانند رابطه (۱۸) در می‌آید.

$$-\omega^T[m]\bar{c} + [k + k_{P_0}]\bar{c} = 0 \quad (18)$$

که در آن k_{P_0} ماتریس متناظر با نیروی محوری $P(y)$ است و شکل ضعیف آن مطابق رابطه (۱۹) بیان می‌شود.

$$k_{P_0} = \int_0^h P(y) \phi_j' \phi_k' dy - P(h) \phi_j'(h) \phi_k'(h) \quad (19)$$

۴-۲ - اثر جرم فوقانی به صورت جرم متمرکز

چنانچه اثر جرم فوقانی در تاج سد مطابق شکل (۱) به صورت جرم متمرکز m در نظر گرفته شود، با صرف نظر از اثر اینرسی با توجه به ابعاد بدنه سد، شرط مرزی نیروی برشی در لبه $y=h$ متفاوت با $\phi''(h) = 0$ خواهد بود. این شرط مرزی برای تیر با نیمرخ ثابت به صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شود.

$$\begin{cases} E I u'''_{(h,t)} = m \ddot{u}_{(h,t)} \\ E I u'''(h) = -m \omega^T u(h) \end{cases} \quad (20)$$

دیگر شرط مرزی در راس سد به صورت $\phi''(h) = 0$ ارائه می‌شود، در این حالت معادله بسامدی رابطه (۲۱) برقرار است.

$$1 + 1 / (\cos(\beta_j h) \cosh(\beta_j h)) - \quad (21)$$

$$R_m(\beta_j h) (tg(\beta_j h) - tgh(\beta_j h)) = 0$$

که در آن $R_m = m/M$ بوده و $M = \rho(m_1 + m_2)h^3/2$ جرم بخش مثلثی سد بدون احتساب جرم فوقانی می‌باشد. ریشه‌های

معادله بسامدی (۲۱) به نسبت R_m بستگی دارد و با توجه به کوچک بودن این نسبت در سدهای بتنی، سه مقدار مختلف ۰/۰۱، ۰/۰۲، ۰/۰۳ در این پژوهش مد نظر قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که معادله بسامدی (۱۴) حالت خاصی از معادله (۲۱) با $R_m = 0$ می‌باشد. برای محاسبات موردنیاز در این پژوهش، ده ریشه اول معادله‌های بسامدی (۲۱) تعیین و در جدول (۱) ارائه گردیده است.

لازم به ذکر است در حالتی که جرم فوقانی به صورت یک جرم متمرکز در نظر گرفته شود، کلیه روابط پیشتر ارائه شده مربوط به روش گالرکین برقرار است.

از دیدگاه نظری مناسب‌تر است جرم متمرکز m به مرکز جرم یا همان مرکز سطح جرم فوقانی منتقل شود تا از اثر انتقال لنگر ناشی از آن که باعث مشکلاتی در اقناع شرط مرزی لنگر در $y=h$ اجتناب شود. اما در ادامه نشان داده خواهد شد تاثیر m بر بسامد سد بسیار ناچیز است و لذا می‌توان از لنگر ناشی از آن صرف نظر کرد.

۵-۲ - اثر جرم فوقانی با تغییر مشخصات هندسی

برای احتساب اثر جرم فوقانی، علاوه بر در نظر گرفتن آن به صورت جرم و یا نیروی متمرکز، می‌توان اثر آن را به صورت تغییر در هندسه سد در نظر گرفت. بدین منظور بازه انتقال-گیری در رابطه (۶) به تعداد تغییر ضابطه مساحت و ممان-اینرسی در ارتفاع سد تغییر می‌یابد که به عنوان مثال برای شکل ۱ به دوبازه از صفر تا $h - \Delta h$ با تغییرات خطی مساحت و ممان اینرسی و از $h - \Delta h$ تا h با مساحت و ممان اینرسی ثابت در بخش جرم فوقانی استفاده نمود.

جدول ۱: ریشه‌های معادله بسامدی تیر یک سرگیردار و یک سر آزاد در ارتعاش جانبی به ازای مقادیرهای متفاوت R_m .

$\beta_1 h$	$\beta_2 h$	$\beta_3 h$	$\beta_4 h$	$\beta_5 h$	$\beta_6 h$	$\beta_7 h$	$\beta_8 h$	$\beta_9 h$	$\beta_{10} h$	R_m
۲۹/۸۴۵۱	۲۶/۷۰۳۵	۲۳/۵۶۲۰	۲۰/۴۲۰۴	۱۷/۲۷۸۸	۱۴/۱۳۷۲	۱۰/۹۹۵۶	۷/۸۵۴۷	۴/۶۹۴۱	۱/۸۷۵۱	۰/۰۰
۲۹/۶۲۰۵	۲۶/۴۹۷۱	۲۳/۳۷۴۰	۲۰/۲۵۳۵	۱۷/۱۳۳۵	۱۴/۰۱۴۹	۱۰/۸۹۷۶	۷/۷۸۲۷	۴/۶۴۹۷	۱/۸۵۶۸	۰/۰۱
۲۹/۴۹۰۰	۲۶/۳۷۱۱	۲۳/۲۵۴۶	۲۰/۱۴۰۷	۱۷/۰۳۰۰	۱۳/۹۲۲۷	۱۰/۸۱۹۵	۷/۷۲۱۸	۴/۶۱۰۰	۱/۸۳۹۳	۰/۰۲
۲۹/۴۰۶۸	۲۶/۲۸۸۳	۲۳/۱۷۲۸	۲۰/۰۶۱۰	۱۶/۹۵۳۶	۱۳/۸۵۱۶	۱۰/۷۵۶۳	۷/۶۶۹۸	۴/۵۷۴۳	۱/۸۲۲۶	۰/۰۳

۲-۶- تیر رایلی

با روندی مشابه به تیر اویلر-برنولی، شکل ضعیف رابطه گالرکین برای تیر رایلی با احتساب نیروی محوری به صورت رابطه (۲۲) به دست می‌آید.

$$-\omega^2 [m - m_\theta - m_k] \bar{c} + [k + k_p] \bar{c} = 0 \quad (22)$$

که در آن m_θ جرم دورانی و m_k نیز جمله حاصل از تبدیل روابط به فرم ضعیف و مربوط به انتگرالگیری جزیه‌جز در اعمال شرایط مرزی در لبه‌های تیر می‌باشد که همانند رابطه (۲۳) می‌باشند.

$$m_{\theta jk} = \rho \int_0^h I \phi_j' \phi_k' dy, \quad (23)$$

$$m_{kj} = \rho I (h) \phi_j' (h) \phi_k' (h)$$

در تحلیل ارتعاش آزاد بر اساس نظریه رایلی، از همان تابع قیاسی نظریه اویلر-برنولی می‌توان برای تعیین ماتریس‌ها در روابط (۲۲) و (۲۳) بهره گرفت. همچنین در این حالت برای در نظر گرفتن اثر جرم فوقانی به صورت جرم متمرکز، نیروی معادل وزن و یا تعریف هندسه جرم فوقانی با مساحت و ممان اینرسی متفاوت به مانند روش بیان شده برای تیر اویلر-برنولی می‌توان عمل نمود.

۳- معادلات حاکم بر ارتعاش محوری

در ساده‌ترین نظریه ارتعاش محوری تیرها، سطح جانبی تیر در حین ارتعاش محوری ثابت باقی مانده و به جز تغییر شکل‌های محوری سایر مولفه‌های تغییر شکل را می‌توان انکار نمود. چنین نظریه ساده‌ای در ارتعاش محوری را می‌توان نظیر نظریه اویلر-برنولی در خمش دانست که در این پژوهش تحت عنوان نظریه "نظیر اویلر-برنولی" از آن یاد خواهد شد. در نظریه رایلی در ارتعاش محوری اثر اینرسی ناشی از حرکت جانبی مقاطع لحاظ می‌گردد در حالی که سختی برشی هم-چنان در نظر گرفته نمی‌شود.

بر اساس آنچه بیان شد، معادلات دیفرانسیل دو نظریه فوق در تحلیل ارتعاش آزاد محوری را می‌توان همانند روابط (۲۴) و (۲۵) بیان کرد [1].

$$(EA\bar{v})' - \rho A \ddot{\bar{v}} = 0 \quad (24)$$

$$(EA\bar{v})' + \rho v^2 (J\ddot{\bar{v}})' - \rho A \ddot{\bar{v}} = 0 \quad (25)$$

که در آن‌ها $\bar{v} = \bar{v}(y, t)$ مطابق شکل ۱ جابجایی محوری، v ضریب پواسون و J ممان قطبی نیمرخ افقی است. با فرض حرکت هارمونیک با بسامد ω در ارتعاش محوری به صورت $\bar{v}(y, t) = v(y) e^{i\omega t}$ و جای‌گذاری آن در روابط (۲۴) و (۲۵) می‌توان معادلات فوق را از دامنه زمان به دامنه بسامدی منتقل کرد که برای مصالح همگن در روابط (۲۶) و (۲۷) ارائه شده است.

$$E(Av')' + \rho \omega^2 Av = 0 \quad (26)$$

$$E(Av')' - \rho \omega^2 v^2 (Jv')' + \rho \omega^2 Av = 0 \quad (27)$$

۳-۱- تیر نظیر اویلر-برنولی

در این حالت با استفاده از تابع قیاسی ϕ_{aj} در رابطه (۵) و جای‌گذاری آن در معادله دیفرانسیل (۲۶) باقیمانده وزنی از رابطه (۲۸) تعیین می‌شود.

$$R = \omega^2 \rho A \sum_{j=1}^N c_{aj} \phi_{aj} + E \sum_{j=1}^N c_{aj} [A \phi_{aj}''] \quad (28)$$

که در آن c_{aj} ، به مانند c_j در ارتعاش جانبی، ضرایب ثابت برای ارتعاش محوری می‌باشند. با قرار دادن رابطه (۲۸) در معادله (۶) و ضرب آن در توابع وزنی، رابطه (۲۹) نتیجه می‌شود.

$$\sum_{j=1}^N c_{aj} (\omega^2 \rho \int_0^h A \phi_{aj} \phi_{ak} dy - E \int_0^h [A \phi_{aj}''] \phi_{ak} dy) = 0 \quad (29)$$

چنانچه ضرایب سختی k_{aij} و جرم m_{aij} به فرم ضعیف به مانند روابط (۳۰) مرتب گردند، در این صورت رابطه (۲۹) را می‌توان به شکل رابطه (۳۱) بیان نمود.

$$k_{aij} = E \int_0^h A \phi_{aj}' \phi_{ak}' dy, \quad m_{aij} = \rho \int_0^h A \phi_{aj} \phi_{ak} dy \quad (30)$$

$$\omega^2 \sum_{j=1}^N m_{ajk} c_j - \sum_{j=1}^N k_{ajk} c_j = 0 \quad (31)$$

که به شکل ماتریسی همانند رابطه (۳۲) بازنویسی می‌شود.

$$[\omega^2 m_a - k_a] \bar{c} = 0 \quad (32)$$

برای جواب غیر بدیهی لازم است دترمینان ضرایب دستگاه معادلات (۳۲) برابر صفر قرار گیرد تا مقدارهای ویژه تعیین گردند.

مود ارتعاش محوری تیرهمگن یکنواخت یک سرگیردار و یک-سر آزاد با حل معادله دیفرانسیل (۲۶) و اعمال شرایط مرزی به صورت $\phi_{aj}(0) = \phi'_{aj}(h) = 0$ مطابق رابطه (۳۳) خواهد بود.

$$\phi_{aj}(y) = \sin\left(\frac{y}{h}\right) \sin\left(\frac{j-1}{2h} \pi y\right) \quad (33)$$

که در آن j عدد صحیح و از یک شروع خواهد شد.

۳-۲- نظریه رابلی

با روندی مشابه تیر نظیر اویلر-برنولی و استفاده از معادله دیفرانسیل (۲۷)، معادله مشخصه تیر رابلی در ارتعاش محوری به صورت رابطه (۳۴) خواهد بود.

$$[\omega^2(m_a + m_{a\theta}) - k_a] \bar{c} = 0 \quad (34)$$

که در آن شکل ضعیف $m_{a\theta}$ از رابطه (۳۵) تعیین می-گردد.

$$m_{a\theta jk} = \rho V \int_0^h J \phi'_{aj} \phi'_{ak} dy \quad (35)$$

۳-۳- اثر جرم فوقانی

در تحلیل ارتعاش آزاد محوری سدهای بتنی وزنی، در نظر گرفتن اثر جرم فوقانی به صورت نیروی متمرکز منجر به تحلیل ارتعاش اجباری می-گردد که خارج از موضوع تحقیق حاضر می-باشد. بنابراین اثر جرم فوقانی در این بخش فقط به صورت جرم متمرکز m و اعمال شرایط مرزی در تاج سد، شکل ۱، در نظر گرفته می-شود. در این حالت شرایط مرزی در لبه $y=h$ متفاوت با آنچه پیش تر برای ارتعاش جانبی ارائه شد، خواهد بود. در اثر ارتعاش محوری سد، وجود جرم متمرکز m در تاج سد منجر به ایجاد نیروی $-m\ddot{v}(h,t)$ می-گردد. به این ترتیب شرایط مرزی برای تیر با مقطع ثابت به صورت رابطه (۳۶) بیان می-شود.

$$\begin{cases} E\bar{v}(h,t) = -m\ddot{v}(h,t) \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

با توجه به شکل مود ارتعاشی انتخابی به مانند رابطه (۳۳) و رابطه اول (۳۶)، معادله بسامدی تیر با مقطع یکنواخت مطابق رابطه (۳۷) نتیجه می-شود.

$$(\beta_j h) R_m \sin(\beta_j h) = \cos(\beta_j h) \quad (37)$$

به مانند ارتعاش جانبی، در حالت ارتعاش محوری نیز سه مقدار مختلف R_m معادل ۰/۰۱، ۰/۰۲، ۰/۰۳، مورد توجه قرار گرفته و براساس آن ریشه‌های معادله بسامدی (۳۷) تعیین و در جدول ۲ ارائه گردیده است.

در حالتی که جرم m در لبه آزاد تیر قرار دارد، کلیه روابط پیشین مربوط به روش گالرکین برای ارتعاش محوری نیز صادق است و از اثر لنگر ناشی از انتقال جرم صرف نظر می-گردد.

به مانند ارتعاش جانبی، در ارتعاش محوری نیز اثر جرم فوقانی را می-توان با تعریف مساحت و ممان اینرسی متفاوت با بخش مثلثی سد در بازه‌های متفاوت انتگرال گیری‌ها در نظر گرفت.

۴- بحث و نتیجه گیری

به منظور تعیین بسامد زاویه‌ای سد بتنی مثلثی شکل بر اساس روش گالرکین و نظریه‌های اویلر-برنولی و رابلی با کمک برنامه کامپیوتری در محیط متلب (Matlab) بسامدهای ارتعاش جانبی و محوری تعیین گردیدند. به منظور صحت-سنجی، نتایج حاصل از این پژوهش برای ارتعاش جانبی و محوری ابتدا برای تیر یکنواخت و سپس برای سدهای بتنی به ترتیب با نتایج حاصل از روش تحلیلی مقایسه گردیدند که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد.

۴-۱- نتایج عددی

۴-۱-۱- ارتعاش جانبی

به منظور تعیین تعداد مودهای مورد نیاز، N ، در محاسبه مقدارهای ویژه در حالت‌های مختلف، ابتدا برای حالت خاص، تیر یکنواخت، نتایج محاسبه و با نتایج تحلیل دقیق در مراجع مختلف از جمله [1] مقایسه گردید. نتایج به دست آمده برای بسامدهای زاویه‌ای تحقیق حاضر نشان می-دهد که هر تعداد مود انتخابی N بادقت بسیار خوبی، حداقل تا سه رقم اعشار

بسته به حالت مورد مقایسه، با نتایج تحلیل دقیق تطابق کامل دارند.

برای نیمرخ‌های متغیر، از آنجایی که ممان اینرسی و سطح مقطع در ارتفاع تغییر می‌نماید، هرچه تعداد مودهای انتخابی بیش‌تر باشد نتایج دقیق‌تر خواهد بود. به منظور دسترسی به یک شاخص مناسب در خصوص انتخاب تعداد مودها، N ، نتایج محاسبات برای بسامد زاویه‌ای یک سد بتنی وزنی مثلثی شکل فرضی با مشخصات هندسی $m_1=1$ ، $m_2=1/75$ ، $h=100$ ، مطابق شکل (۱)، و نیز مشخصات فیزیکی و مکانیکی مصالح سد $\rho=2500 \text{ kg/m}^3$ ، $E=22/4 \text{ MPa}$ در نظر گرفته شده است. سطح مقطع و ممان اینرسی سد نیز مطابق شکل (۱) با فرض تغییرات خطی ضخامت از رابطه (۳۸) تعیین گردید که در آن $\bar{m} = m_1 + m_2$ بوده و طول سد برابر واحد در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} A(y) = (\bar{m})(h-y) \\ I(y) = \bar{m}^3 (h-y)^3 / 12 \end{cases} \quad (38)$$

نتایج به‌دست آمده برای بسامد زاویه‌ای سد مورد بررسی، مبتنی بر نظریه اوپلر-برنولی در حالت کلی ضربی از $\frac{\bar{m}}{h} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ است که به دلیل طولانی بودن روابط، نتایج به‌صورت مقادیر عددی ارائه می‌شوند. در جدول (۳) بسامدهای زاویه‌ای سد در ۸ مود مختلف بر اساس دو نظریه اوپلر-برنولی ω_{JE} و رایلی ω_{JR} و نسبت آن‌ها $\alpha_j = \omega_{JE} / \omega_{JR}$ ارائه شده است. همان‌طور که از جدول یاد شده قابل ملاحظه است، بسامدهای طبیعی در مودهای بالاتر به ازای یک N مشخص دقت کم‌تری دارند و با افزایش N اصلاح می‌گردد. از آنجایی که در این تحقیق ۵ مود اول مورد بررسی قرار می‌گیرد، تعداد مودهای انتخابی $N=8$ اختیار می‌گردد. در این صورت و مطابق جدول (۳) بیش‌ترین درصد خطای ناشی از محاسبه بالاترین بسامد از رابطه $\varepsilon = \frac{\omega_j - \omega_{j+1}}{\omega_j}$ که در آن j بسامد زاویه‌ای j ام در بین N مود می‌باشد به کمتر از هشت درصد می‌رسد.

علاوه بر این در جدول (۳) نسبت بسامدهای j ام بر اساس نظریه اوپلر-برنولی به نظریه رایلی همواره بزرگتر از یک می‌باشد. این مسئله گویای آن است که بسامد مود j ام تیر اوپلر-برنولی همواره از بسامد نظیر تیر رایلی بیشتر است. علت چنین وضعیتی را می‌توان به سختی بیشتر تیر اوپلر برنولی

نسبت داد. این اختلاف در مودهای پایین‌تر کمتر و برای مود اول حدود ۱/۰۴ برابر است، ولی برای مودهای بالاتر این نسبت افزایش می‌یابد و برای مود هشتم به نزدیک ۳/۵ برابر نیز می‌رسد. این موضوع گویای آن است که در مودهای پایین‌تر شاید بتوان از خطای ناشی از انکار اثر اینرسی دورانی چشم‌پوشی کرد، ولی در مودهای بالاتر نظریه اوپلر-برنولی خطای قابل توجهی دارد و لازم است از نظریه رایلی استفاده شود. علاوه بر این، نتایج ارائه شده در جدول (۳) به‌طور مشخصی گویای آن است که مقدار بسامدها در دو نظریه یا نسبت آن‌ها با افزایش تعداد مودهای محاسباتی، N ، به مقدار ثابتی میل می‌کند که گویای بسندگی تعداد مودهای مورد نیاز در محاسبه بسامد می‌باشد.

۴-۱-۲- پاسخ تحلیلی

معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش جانبی تیرهای اوپلر-برنولی، رابطه (۳) بدون اثر نیروی محوری، برای هندسه منطبق بر سدهای بتنی وزنی مطابق شکل ۱ و روابط (۳۸) به مانند معادله (۳۹) قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{aligned} (h-y)^4 u^{(4)} + 6(h-y)^3 u^{(3)} \\ + 6(h-y)^2 u^{(2)} - \frac{12\rho\omega^2}{E\bar{m}^3} (h-y)^2 u = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

معادله دیفرانسیل (۳۹) از نوع همگن مرتبه ۴ با ضرایب متغیر و از نوع بسل بوده و با معرفی $a^4 = \frac{12\rho\omega^2}{E\bar{m}^3}$ ، داری پاسخ تحلیلی به شکل معادله (۴۰) می‌باشد:

$$\begin{aligned} u(y) = \frac{1}{\sqrt{h-y}} (c_1 J_1(2a\sqrt{h-y}) + c_2 Y_1(2a\sqrt{h-y}) \\ + c_3 I_1(2a\sqrt{h-y}) + c_4 K_1(2a\sqrt{h-y})) \end{aligned} \quad (40)$$

که در آن K_1, I_1, Y_1, J_1 به ترتیب توابع بسل نوع ۱، ۲ و اصلاح شده نوع ۱ و ۲ همگی از مرتبه ۱ می‌باشند. ضرایب c_1 الی c_4 ضرایب ثابت هستند که با اعمال شرایط مرزی به ترتیب نیروی برشی و لنگر خمشی در راس سد و $u' = u = 0$ در کف سد، معادله بسامدی تعیین و با حل آن بسامد زاویه ارتعاش جانبی به‌دست می‌آید. به منظور صحت‌سنجی، نتایج به‌دست آمده از روش گالرکین مورد استفاده در این پژوهش بر اساس نظریه اوپلر-برنولی با نتایج تحلیلی حاصل از رابطه (۴۰) در جدول (۳) مقایسه گردیدند. نتایج گویای آن است که در مود اول انطباق کامل بین

حاصل از روش گالرکین دانست که در آن موده‌های بالاتر به‌ازای N بیش‌تر باید محاسبه گردند.

روش تحلیلی و روش گالرکین وجود دارد. اما به تدریج و با افزایش شماره مود اختلاف افزایش و در موده‌های بالا اختلاف پاسخ‌ها قابل توجه است که علت آن را می‌توان عدم دقت ناشی از بسامدزایه‌ای

جدول ۲: ریشه‌های معادله بسامدی تیر یک‌سرگیردار و یک‌سر آزاد در ارتعاش محوری به‌ازای مقادیرهای متفاوت R_m .

$\beta_1 h$	$\beta_2 h$	$\beta_3 h$	$\beta_4 h$	$\beta_5 h$	$\beta_6 h$	$\beta_7 h$	$\beta_8 h$	$\beta_9 h$	$\beta_{10} h$	R_m
۲۹/۸۴۵۱	۲۶/۷۰۳۵	۲۳/۵۶۱۹	۲۰/۴۲۰۴	۱۷/۲۷۸۸	۱۴/۱۳۷۲	۱۰/۹۹۵۶	۷/۸۵۴۰	۴/۷۱۲۴	۱/۵۷۰۸	۰/۰۰
۲۹/۵۵۷۷	۲۶/۴۴۵۰	۲۳/۳۳۲۷	۲۰/۲۲۰۸	۱۷/۱۰۹۳	۱۳/۹۹۸۱	۱۰/۸۸۷۱	۷/۷۷۶۴	۴/۶۶۵۷	۱/۵۵۵۲	۰/۰۱
۲۹/۳۱۴۹	۲۶/۲۲۰۶	۲۳/۱۲۸۷	۲۰/۰۳۹۲	۱۶/۹۵۱۹	۱۳/۸۶۶۶	۱۰/۷۸۳۲	۷/۷۰۱۰	۴/۶۲۰۳	۱/۵۴۰۰	۰/۰۲
۲۹/۱۲۷۰	۲۶/۰۴۰۴	۲۲/۹۵۸۸	۱۹/۸۸۲۵	۱۶/۸۱۱۷	۱۳/۷۴۶۰	۱۰/۶۸۵۴	۷/۶۲۹۰	۴/۵۷۶۰	۱/۵۲۵۱	۰/۰۳

جدول ۳: بسامد طبیعی ارتعاش جانبی حاصل از نظریه اوایلر-برنولی و رابلی و نسبت آن‌ها، ω_{JE}/ω_{JR} ، بر حسب rad/s .

j								N
۸	۷	۳	۴	۵	۶	۲	۱	
-	-	-	-	-	-	-	$\frac{39/42}{37/53} = 1/0.5$	۱
-	-	-	-	-	-	$\frac{140/62}{120/0.5} = 1/17$	$\frac{35/22}{33/68} = 1/0.5$	۲
-	-	-	-	-	$\frac{324/0.8}{228/84} = 1/42$	$\frac{109/70}{96/82} = 1/13$	$\frac{34/66}{33/21} = 1/0.4$	۳
-	-	-	-	$\frac{597/91}{340/90} = 1/75$	$\frac{243/93}{185/60} = 1/31$	$\frac{103/99}{93/27} = 1/11$	$\frac{34/54}{33/11} = 1/0.4$	۴
-	-	-	$\frac{966/38}{450/26} = 2/14$	$\frac{449/49}{284/95} = 1/58$	$\frac{223/72}{177/47} = 1/26$	$\frac{101/33}{91/44} = 1/11$	$\frac{34/49}{33/0.7} = 1/0.4$	۵
-	-	$\frac{1432/47}{556/75} = 2/57$	$\frac{732/29}{386/45} = 1/89$	$\frac{405/62}{274/23} = 1/48$	$\frac{212/29}{171/71} = 1/24$	$\frac{100/20}{90/73} = 1/10$	$\frac{34/47}{33/0.5} = 1/0.4$	۶
-	$\frac{1998/50}{661/0.7} = 3/0.2$	$\frac{1096/23}{487/63} = 2/25$	$\frac{656/11}{374/86} = 1/75$	$\frac{478/67}{264/69} = 1/81$	$\frac{206/54}{169/20} = 1/22$	$\frac{99/55}{90/30} = 1/10$	$\frac{34/46}{33/0.4} = 1/0.4$	۷
$\frac{2665/92}{763/75} = 3/49$	$\frac{1544/45}{588/0.1} = 2/63$	$\frac{979/0.6}{475/99} = 2/0.6$	$\frac{607/35}{362/57} = 1/68$	$\frac{363/70}{260/38} = 1/40$	$\frac{202/75}{167/35} = 1/21$	$\frac{99/21}{90/0.9} = 1/10$	$\frac{34/45}{33/0.4} = 1/0.4$	۸
۱۱۵۳/۷۹	۸۹۸/۰۰	۶۷۳/۹۷	۴۸۲/۴۲	۳۲۲/۵۰	۱۹۴/۵۵	۹۸/۵۵	۳۴/۴۵	رابطه (۴۰)

سد در دو ارتفاع مختلف به حسب نسبت دو ارتفاع متفاوت را می‌توان به متغیر بودن نیمرخ قائم سد و محدودیت تعداد جملات N در پاسخ آزمایشی نسبت داد.

نسبت بسامدها در نظریه اوایلر-برنولی به رابلی در جدول (۳) در بازه حدود ۱/۰۵ برای مود اول تا ۳/۵ برابر در مود هشتم و در جدول (۴) نیز در دامنه یکسان تغییر می‌نماید. برای بررسی بیش‌تر این موضوع و به عنوان نمونه، در جدول (۵) نتایج برای سدی به ارتفاع $h=100m$ و شیب‌های بالادست و پایین‌دست $m_1=0$ ، $m_2=0.1$ که یک نمونه کاملاً فرضی و در عمل غیرمنطقی می‌باشد ارائه شده است که با نتایج نظیر در

در جدول (۴) نیز مقادیر ۵ بسامد طبیعی به‌ازای $N=8$ برای چهار ارتفاع مختلف سد برای شیب $m_1=0$ ، $m_2=0.75$ ارائه شده است. مقایسه نتایج این جدول نشان می‌دهد که بسامد طبیعی سد به نسبت عکس ارتفاع سد می‌باشد که وابستگی بسامد طبیعی را به رابطه $\frac{\bar{m}}{h} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ در نظریه اوایلر-برنولی تایید می‌کند. این موضوع علاوه بر ارتفاع سد برای سایر پارامترهای عبارت اشاره شده نیز برقرار است که به دلیل محدودیت حجم مقاله از ارائه نتایج عددی در این خصوص خودداری می‌شود. اختلاف ناچیز موجود در جدول (۴) در خصوص نسبت بسامد

جدول‌های (۳) و (۴) به‌ازای $m_1=0, m_2=0.75$ قابل مقایسه می‌باشد. از جدول (۵) کاملاً پیداست که اختلاف نتایج نظریه اوپلر-برنولی و رایلی حتی در بسامدهای بالاتر بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. علت این موضوع را می‌توان به نسبت عرض کف به ارتفاع سد که در تیرهای همگن معادل نسبت ارتفاع تیر به طول تیر می‌باشد مرتبط دانست. در تیرهای عمیق این نسبت تاثیر عمده‌ای در رفتار برشی و نیز اینرسی دورانی تیر ایفا می‌کند که در سدهای بتنی وزنی با هندسه غیریکنواخت در ارتفاع نیز مشهود است. مجدداً تاکید می‌گردد که در سدهای بتنی شیب m_2 در محدوده $0.7 \sim 0.8$ تغییر می‌کند، بنابراین توجه به اثر اینرسی دورانی به خصوص در بسامدهای بالاتر ضروری است.

۴-۱-۳- اثر جرم فوقانی

در بخش‌های پیشین فرمول‌بندی اثر جرم فوقانی بر سد به صورت نیروی ثابت محوری P_0 در راس سد و جرم متمرکز m مطرح شد تا اثر آن بر فرکانس طبیعی سد مورد بررسی قرار گیرد. براین اساس در جدول (۶) نتایج حاصل از تحلیل به روش گالرگین برای سه مقدار مختلف R_m ، نیروی ناشی از اثر فقط وزن جرم فوقانی P_0 معادل ۳ درصد وزن بخش مثلثی سد و نیز اثر توأم وزن جرم فوقانی و وزن بدنه سد ارائه شده است. نتایج ارائه شده در جدول (۶) گویای آن است که اثر R_m و نیز P_0 در دامنه مقدارهای واقعی خود بر بسامد طبیعی سد بسیار ناچیز است و در مودهای پایین به راحتی می‌توان از اثر آن صرف‌نظر کرد. علاوه براین، وزن سد که مقدار قابل توجهی دارد و در پایداری و مقاومت سدهای بتنی وزنی نقش اساسی ایفا می‌کند. با وجود آن که انتظار می‌رود

به دلیل فشاری بودن باعث کاهش بسامد طبیعی شود، تاثیر بسیار ناچیزی بر ارتعاش جانبی سد دارد و در مودهای پایین نیز می‌توان از اثر آن صرف‌نظر نمود. در هر صورت وجود نیروهای فشاری P_0 ناشی از جرم فوقانی، وزن سد و جرم ناشی از جرم فوقانی باعث کاهش اندکی در بسامدهای طبیعی می‌شود که تاثیر آن در مودهای بالاتر بیشتر است. نتایج ارائه شده در جدول (۶) همچنین گویای آن است که اثر مدل نمودن جرم فوقانی به صورت جرم بر راس سد مثلی هرچند اندک اما کمی بیش‌تر از اثر آن بصورت نیروی وزن جرم فوقانی است. علاوه بر این، نیروها و جرم‌های ذکر شده در نظریه رایلی اندکی بیش‌تر از نظریه اوپلر-برنولی باعث کاهش بسامدهای به ویژه در مودهای بالاتر می‌شود. در هر صورت در مسائل عملی در شبیه‌سازی جرم فوقانی به صورت جرم و یا نیرو به راحتی می‌توان از اثر آن‌ها و فراتر از آن حتی از وزن بدنه سد در تحلیل ارتعاش آزاد صرف‌نظر نمود.

در جدول (۶) بسامد زاویه‌ای طبیعی سد با احتساب اثر جرم فوقانی با تغییرات خطی مساحت و ممان اینرسی در بازه ۰ تا $h - \Delta h = 95m$ و ثابت بودن آن‌ها در بازه $h - \Delta h$ تا $h = 100m$ نیز ارائه شده است که نتایج آن با نتایج ارائه شده سد مثلی شکل قابل مقایسه می‌باشد. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد اثر تغییر مساحت و ممان اینرسی بر بسامد طبیعی نسبت به شبیه‌سازی جرم فوقانی به‌صورت جرم و یا نیروی متمرکز بر بسامد بیش‌تر است و در این حالت به راحتی نمی‌توان از اثر جرم فوقانی صرف‌نظر نمود. بنابراین درصد خطای ناشی از در نظر نگرفتن اثر جرم فوقانی برای سد ۱۰۰ متری بر اساس نظریه‌های اوپلر-برنولی و رایلی به ترتیب حدود ۸ و ۲۶ درصد خواهد بود.

جدول ۴: بسامد طبیعی ارتعاش جانبی سد بر اساس نظریه‌های اوپلر-برنولی و رایلی برای چهار ارتفاع مختلف، s / rad .

نظریه	ارتفاع سد، m	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
اوپلر-برنولی	۵۰	۶۸/۹۱	۱۹۸/۴۳	۴۰۵/۵۰	۷۲۷/۴۰	۱۲۱۴/۷۱
	۱۰۰	۳۴/۴۵	۹۹/۲۱	۲۰۲/۷۵	۳۶۳/۷۰	۶۰۷/۳۵
	۱۵۰	۲۲/۹۷	۶۶/۱۴	۱۳۵/۱۷	۲۴۲/۴۷	۴۰۴/۹۴
	۲۰۰	۱۷/۲۳	۴۹/۶۱	۱۰۱/۳۸	۱۸۱/۸۶	۳۰۳/۷۰
رایلی	۵۰	۶۶/۰۷	۱۸۰/۱۹	۳۳۴/۷۱	۵۲۰/۷۵	۷۲۵/۱۵
	۱۰۰	۳۳/۰۴	۹۰/۰۹	۱۶۷/۳۵	۲۶۰/۳۸	۳۶۲/۵۸
	۱۵۰	۲۲/۰۲	۶۰/۰۶	۱۱۱/۵۷	۱۷۳/۵۹	۲۴۱/۷۲
	۲۰۰	۱۶/۵۲	۴۵/۰۵	۸۳/۶۸	۱۳۰/۱۹	۱۸۱/۳۰

جدول ۵: بسامد طبیعی سد مبتنی بر نظریه های اوپلر-برنولی و رایلی به ازای $m_1=0, m_2=0.1$ بر حسب rad/s .

نظریه	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
اوپلر برنولی	۰/۴۶	۱/۳۳	۲/۷۰	۴/۸۵	۸/۱۰	۱۳/۱۰	۲۰/۵۹	۳۵/۵۵
رایلی	۰/۴۶	۱/۳۲	۲/۷۰	۴/۸۵	۸/۱۰	۱۳/۱۰	۲۰/۵۸	۳۵/۵۱

جدول ۶: بسامد طبیعی ارتعاش جانبی سد به ازای شرایط متفاوت تاج سد بر حسب rad/s .

نظریه	شبه سازی جرم فوقانی یا	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
اوپلر-برنولی	$R_m = 0/00$	۳۴/۴۵	۹۹/۲۱	۲۰۲/۷۵	۳۶۳/۷۰	۶۰۷/۳۵
	$R_m = 0/02$	۳۴/۴۵	۹۹/۰۴	۲۰۱/۱۳	۳۵۷/۸۶	۵۹۴/۵۱
	$R_m = 0/03$	۳۴/۴۵	۹۹/۰۰	۲۰۰/۷۱	۳۵۶/۳۱	۵۹۱/۰۹
رایلی	P_0	۳۴/۴۵	۹۹/۲۱	۲۰۲/۷۵	۳۶۳/۷۰	۶۰۷/۳۵
	$P(y)$	۳۴/۴۵	۹۹/۲۱	۲۰۲/۷۴	۳۶۳/۷۰	۶۰۷/۳۵
	با احتساب اثر هندسه سازه فوقانی	۳۳/۶۷	۹۲/۴۸	۱۸۷/۰۸	۳۴۴/۴۳	۵۸۷/۹۵
	$R_m = 0/00$	۳۳/۰۴	۹۰/۰۹	۱۶۷/۳۵	۲۶۰/۳۸	۳۶۲/۵۷
	$R_m = 0/02$	۳۳/۰۴	۸۹/۹۹	۱۶۶/۵۷	۲۵۸/۲۱	۳۵۸/۹۳
	$R_m = 0/03$	۳۳/۰۳	۸۹/۹۶	۱۶۶/۳۶	۲۵۷/۶۳	۳۵۷/۹۵
	P_0	۳۳/۰۴	۹۰/۰۹	۱۶۷/۳۵	۲۶۰/۳۸	۳۶۲/۵۷
	$P(y)$	۳۳/۰۳	۹۰/۰۹	۱۶۷/۳۵	۲۶۰/۳۷	۳۶۲/۵۷
	با احتساب اثر هندسه جرم فوقانی	۲۴/۳۳	۷۰/۵۲	۱۳۸/۹۱	۲۲۵/۰۳	۳۲۳/۵۷

۴-۲- نتایج ارتعاش محوری

۴-۲-۱- پاسخ تحلیلی

معادله دیفرانسیل ارتعاش محوری تیر اوپلر-برنولی، معادله (۲۴)، برای سدهای بتنی وزنی با تغییرات خطی نیمرخ در ارتفاع سد، مطابق شکل ۱، پس از ساده سازی به صورت رابطه ۴۱ بازنویسی می گردد.

$$v'' + \frac{A'}{A}v' + \frac{\rho\omega^2}{E}v = 0 \quad (41)$$

پس از جای گذاری تابع مساحت بر اساس رابطه (۳۸)، با توجه به شکل ۱، معادله دیفرانسیل همگن مرتبه ۲ با ضریب متغیر نظیر رابطه (۴۲) به دست خواهد آمد که جواب آن در رابطه (۴۳) ارائه شده است.

$$v'' - \frac{1}{h-y}v' + \frac{\rho\omega^2}{E}v = 0 \quad (42)$$

$$v = c_1 J_1((h-y)\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}}) + \quad (43)$$

$$c_2 Y_1((h-y)\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}})$$

که در آن J_1 و Y_1 به ترتیب توابع بسل نوع یک و دو مرتبه صفر را نشان می دهند. c_1, c_2 نیز ضرایب ثابت هستند که با اعمال شرایط مرزی در تاج سد، $v(h) = 0$ ، مقدار ثابت c_1 برابر صفر خواهد بود. با توجه به شرط مرزی در کف سد به صورت $v(0) = 0$ ، بسامد ارتعاش آزاد سد مطابق رابطه (۴۴) به دست می آید که نتایج آن در این تحقیق برای صحت سنجی مورد استفاده قرار می گیرد.

$$J_1(h\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}}) = 0 \quad (44)$$

در این بخش نتایج به ازای مقدارهای فرضی اما متداول برای سدهای بتنی وزنی با مشخصات هندسی $m_1=0, m_2=0.75, h=100$ مطابق شکل ۱ و نیز مشخصات

فیزیکی و مکانیکی $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $E = 22/4 \text{ GPa}$ می‌گردد. علاوه بر این سطح مقطع همانند رابطه (۳۸) و ممان قطبی از رابطه (۴۵) تعیین می‌گردد.

$$J(y) = I(y) + A(y)/12 \quad (45)$$

همانند نتایج ارائه شده برای ارتعاش جانبی، به منظور تحلیل حساسیت بسامد ارتعاش محوری نسبت به تعداد مودها، در جدول (۷) نتایج نسبت بسامدهای زاویه‌ای سد در ارتعاش محوری برای ۸ مود مختلف برای نظریه‌های نظیر اویلر-برنولی و رایی به‌ازای سه N مختلف ارائه شده است. مطابق این جدول، مقدار بسامد ارتعاش محوری برای سدهای بتنی وزنی، در دامنه متعارف مشخصات هندسی و مکانیکی خود، در مودهای پایین‌تر بیش‌تر از مقادیر نظری در ارتعاش جانبی می‌باشد. ضمن این‌که وابستگی ارتعاش محوری در روش گالرگین به تعداد مودهای مورد نیاز N نسبت به ارتعاش جانبی بسیار کم‌تر است و به همین دلیل مقایسه بسامدهای حاصل از دو نظریه فقط برای N برابر ۱، ۴ و ۸ ارائه شده است. علاوه بر این، به منظور مقایسه نتایج تحت شرایط یکسان، تعداد جملات پاسخ آزمایشی در ارتعاش محوری نیز برابر $N=8$ در نظر گرفته شده است.

علاوه بر این، جدول (۷) نشان می‌دهد که بسامدهای طبیعی در تمام مودها مطابق نظریه رایی کم‌تر از نظریه نظیر اویلر-برنولی به دست می‌آید. این اختلاف بسامدهای طبیعی در مودهای پایین‌تر بسیار ناچیز و قابل اغماض است و در مودهای بالاتر این اختلاف بیش‌تر می‌شود و در مود هشتم به $1/13$ برابر می‌رسد که همانند ارتعاش جانبی این اختلاف را می‌توان به کاهش سختی در نظریه رایی نسبت داد. برخلاف ارتعاش جانبی، اثر اینرسی دورانی بر بسامد طبیعی حتی در مودهای بالاتر قابل توجه نیست و با تقریب می‌توان از اثر آن صرف‌نظر نمود.

به منظور صحت سنجی نتایج در ارتعاش محوری به روش گالرگین، همانند ارتعاش جانبی ابتدا برای حالت خاص که در آن نیمرخ عرضی تیر ثابت است، به دست آمدند و با نتایج

تحلیل دقیق در مراجع مختلف از جمله مرجع [1] مقایسه شدند. نتایج حاصل با دقت بسیار خوبی بر هم منطبق بودند که به دلیل محدودیت حجم مقاله از ارائه آن خودداری می‌شود. به منظور صحت‌سنجی، نتایج حاصل از روش گالرگین برای یک سد بتنی مثلثی شکل براساس نظریه‌های نظیر اویلر-برنولی و رایی با نتایج حاصل از رابطه تحلیلی رابطه (۴۴) برای بسامد ارتعاش محوری در جدول (۸) مورد مقایسه قرار گرفته است.

خطای حاصل از نتایج ارائه شده در جدول (۸) برای بسامدهای طبیعی ارتعاش محوری به روش گالرگین، علی‌رغم تقریبی بودن آن، در مقایسه با روش دقیق مبتنی بر نظریه اویلر-برنولی در بدترین حالت که مربوط به بالاترین مود مورد بررسی، مود هشتم، می‌باشد فقط به 0.3% درصد می‌رسد که گویای دقت روش گالرگین علی‌رغم تقریبی بودن آن می‌باشد.

۴-۲-۱- اثر جرم فوقانی

به منظور تعیین اثر جرم فوقانی بر بسامد طبیعی ارتعاش محوری سد، نتایج حاصل از تحلیل به روش گالرگین به‌ازای سه مقدار R_m در جدول (۹) ارائه شده است. بررسی نتایج ارائه شده در جدول (۹) گویای آن است که اثر R_m در محدوده انتخابی اثر بسیار کمی بر بسامد طبیعی محوری سد دارد و به راحتی و همانند ارتعاش جانبی می‌توان از اثر آن صرف‌نظر نمود.

در جدول (۹) مقدار بسامد طبیعی سد نیز به‌ازای شبیه‌سازی هندسه جرم فوقانی ارائه شده که در آن تغییرات مساحت و ممان قطبی از کف سد تا ارتفاع ۹۵ متر به صورت خطی و در ۵ متر ارتفاع آزاد با مساحت و ممان قطبی ثابت در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که مانند ارتعاش جانبی، تاثیر در نظر گرفتن هندسه سد بیشتر از اثر جرم متمرکز است و درصد خطا نسبت به سد مثلثی بدون اثر جرم فوقانی در نظریه‌های اویلر-برنولی و رایی به ترتیب تا حدود ۹ و ۲ درصد می‌باشد.

جدول ۷: بسامد طبیعی ارتعاش محوری سد حاصل از نظریه نظیر اویلر-برنولی و رایی و نسبت آن‌ها برحسب rad/s .

j								N
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	

$\frac{72}{28} = 1/0.0$	-	-	-	-	-	-	-	۱
$\frac{71}{99} = 1/0.0$ $\frac{71}{77}$	$\frac{165}{25} = 1/0.1$ $\frac{163}{48}$	$\frac{259}{0.8} = 1/0.3$ $\frac{252}{72}$	$\frac{353}{23} = 1/0.5$ $\frac{337}{89}$	-	-	-	-	۴
$\frac{71}{99} = 1/0.0$ $\frac{71}{77}$	$\frac{165}{24} = 1/0.1$ $\frac{163}{46}$	$\frac{259}{0.4} = 1/0.3$ $\frac{252}{71}$	$\frac{352}{96} = 1/0.5$ $\frac{337}{42}$	$\frac{446}{94} = 1/0.7$ $\frac{415}{98}$	$\frac{540}{95} = 1/11$ $\frac{487}{47}$	$\frac{634}{98} = 1/14$ $\frac{556}{95}$	$\frac{729}{21} = 1/13$ $\frac{647}{84}$	۸

جدول ۸: مقایسه نتایج بسامد طبیعی ارتعاش محوری حاصل از روش گالرکین و روش دقیق، rad/s .

روش	نظریه	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
گالرکین	نظیر اویلر-برنولی	۷۱/۹۹	۱۶۵/۲۴	۲۵۹/۰۴	۳۵۲/۹۶	۴۴۶/۹۴	۵۴۰/۹۴	۶۳۴/۹۸	۷۲۹/۲۱
	رایلی	۷۱/۷۷	۱۶۳/۴۶	۲۵۲/۷۱	۳۳۷/۴۲	۴۱۵/۹۸	۴۸۷/۴۷	۵۵۶/۹۵	۶۴۷/۸۴
رابطه (۴۲)	نظیر اویلر-برنولی	۷۱/۹۸	۱۶۵/۲۳	۲۵۹/۰۳	۳۵۲/۹۶	۴۴۶/۹۳	۵۴۰/۹۳	۶۳۴/۹۳	۷۲۸/۹۵

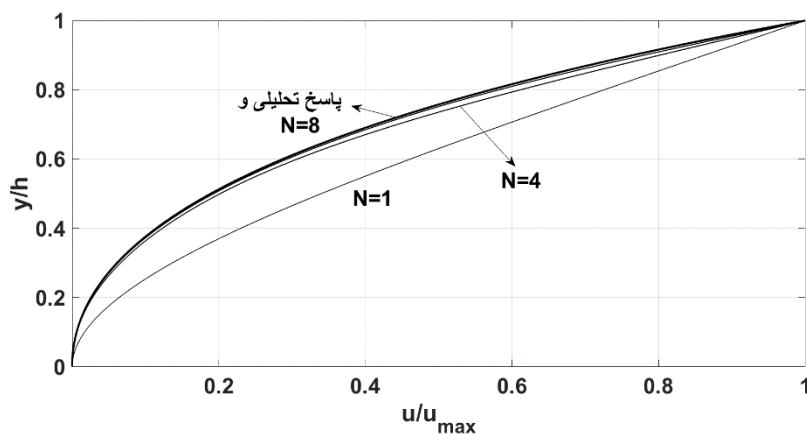
جدول ۹: مقادیر بسامد طبیعی ارتعاش محوری سد با شرایط متفاوت در تاج سد، rad/s .

نظریه	R_m	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
نظیر اویلر-برنولی	۰/۰۰	۷۱/۹۹	۱۶۵/۲۴	۲۵۹/۰۴	۳۵۲/۹۷	۴۴۶/۹۵
	۰/۰۲	۷۱/۹۹	۱۶۵/۲۴	۲۵۹/۰۵	۳۵۳/۰۵	۴۴۷/۱۲
	۰/۰۳	۷۱/۹۹	۱۶۵/۲۴	۲۵۹/۰۴	۳۵۲/۱۰	۴۴۷/۰۰
	با احتساب اثر هندسه جرم فوقانی	۷۱/۹۸	۱۴۱/۰۶	۲۳۵/۱۰	۳۲۹/۱۳	۴۲۳/۱۷
رایلی	۰/۰۰	۷۱/۷۷	۱۶۳/۴۷	۲۵۲/۷۱	۳۳۷/۴۲	۴۱۶/۰۳
	۰/۰۲	۷۱/۷۷	۱۶۳/۴۷	۲۵۲/۷۲	۳۳۷/۴۷	۴۱۶/۲۳
	۰/۰۳	۷۱/۷۷	۱۶۳/۴۷	۲۵۲/۷۱	۳۳۷/۴۴	۴۱۶/۱۱
	با احتساب اثر هندسه جرم فوقانی	۷۱/۴۳	۱۶۱/۷۴	۲۴۸/۷۳	۳۳۰/۹۳	۴۰۷/۵۰

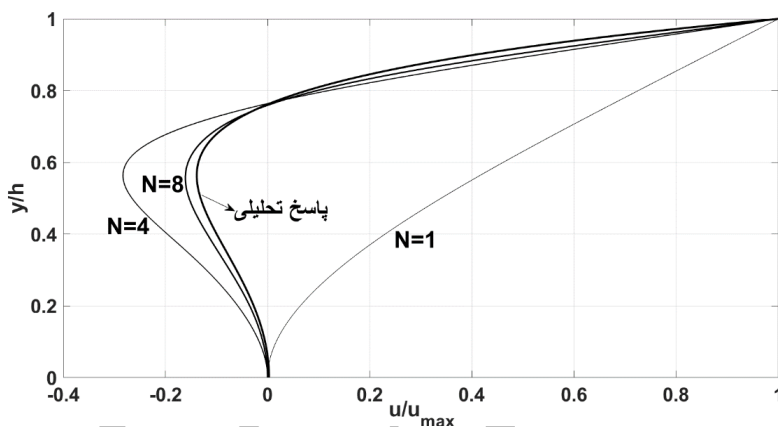
۵- شکل مود

روش ارائه شده در این پژوهش، همانطور که پیشتر بیان گردید، قادر به تعیین شکل مودها نیز می‌باشد. بدین منظور و با توجه به مشخص بودن بسامدهای زاویه‌ای، از رابطه ۱۱ می‌توان برای تعیین $\vec{C}$ استفاده و سپس به کمک رابطه ۵ شکل مود را تعیین نمود که بطور معمول به ازای مقیاس نمودن بیشینه تغییرمکان در مود مورد نظر به اندازه واحد

صورت می‌پذیرد. به عنوان نمونه شکل مود سد مثلی قائم-الزاویه با مشخصات هندسی $m_1=, m_2=1/75, h=100$ مطابق شکل (۱)، و نیز مشخصات فیزیکی و مکانیکی مصالح سد $\rho=2500 kg/m^3, E=22/4 MPa$ در شکل ۲ برای مودهای اول و دوم به‌ازای مقادیر مختلف N ارائه و با شکل مود حاصل از رابطه تحلیلی ۴۰ تحت همان شرایط مقایسه گردیده است.



(الف)



(ب)

شکل ۲: شکل مود ارتعاشی سد مثلثی به روش گالرکین به ازای مقادیر مختلف N و روش تحلیلی، (الف) مود اول، (ب) مود دوم.

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش ارتعاش آزاد جانبی و محوری سدهای بتنی وزنی مثلثی شکل به همراه اثر گله‌گی و مدل‌سازی آن به صورت جرم متمرکز و در نظر گرفتن شرایط مرزی ناشی از آن و نیز اثر نیروی وزن سازه فوقانی و وزن بدنه سد برای ارتعاش جانبی به روش گالرکین مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور با مدل نمودن سد بتنی وزنی به صورت تیر طره با تغییرات خطی نیم‌رخ عرضی و اعمال شرایط مرزی به صورت دقیق در کف و تاج سد، بر اساس نظریه‌های اویلر-برنولی و رایلی در ارتعاش آزاد جانبی و نیز نظریه‌های نظیر اویلر-برنولی و رایلی در ارتعاش آزاد محوری، بسامدزاویه‌ای

در شکل مذکور جابجایی سازه در مود مورد نظر به جابجایی پیشنهادی که در اینجا در راس سد اتفاق می‌افتد بی‌بعد گردیده است. در شکل ۲الف به ازای $N=8$ شکل مود تقریباً بر پاسخ تحلیلی منطبق می‌گردد در حالیکه در مود دوم قدری اختلاف وجود دارد. این اختلاف در مدهای بالاتر بیشتر می‌گردد که در این صورت لزوم در نظر گرفتن N بزرگتر به دلیل همگرایی کندتر ضرورت پیدا می‌کند. انطباق پاسخ به روش گالرکین با افزایش مقدار N به سمت پاسخ تحلیلی مجدداً دلیلی بر صحت روش گالرکین مورد استفاده در این پژوهش می‌باشد.

$\bar{u}$	سرعت جانبی در مختصات مکانی و زمانی
$\ddot{u}$	شتاب جانبی در مختصات مکانی و زمانی
N	تعداد جملات سری
ω	بسامد زاویه‌ای جانبی
ϖ	بسامد زاویه‌ای محوری
j	شمارنده، زیرنویس
ϕ_j	تابع قیاسی
R	مانده
β_j	ضریب
λ, λ_i	مقادیر ویژه
$\bar{c}, c_i$	بردار ویژه
$[m]$	ماتریس جرم
$[k]$	ماتریس سختی
φ	تابع دلخواه
k_p	ماتریس متناظر با نیروی محوری در ماتریس سختی
R_m	نسبت جرم بخش فوقانی به جرم بخش مثلثی
m_θ	جرم دورانی
$m_\gamma, m_{a\theta}, m_a$	جرم
v	تغییر مکان محوری در مختصات مکانی
$\bar{v}$	تغییر مکان محوری در مختصات مکانی زمانی
v	ضریب پواسون
J	ممان قطبی نیمرخ طولی
t	متغیر زمان
m_a	جرم محوری
k_a	سختی محوری
$\bar{m}$	مجموع شیب‌های سرآب و پایاب
m_γ	شیب سرآب
m_γ	شیب پایاب
ε	خطا
J_γ	تابع بسل نوع یک مرتبه یک
Y_γ	تابع بسل نوع دو مرتبه یک
I_γ	تابع بسل اصلاح شده نوع یک مرتبه یک
K_γ	تابع بسل اصلاح شده نوع دو مرتبه یک
a	ضریب
$P(y)$	بارگسترده محوری
P_γ	نیروی متمرکز محوری
J_γ	تابع بسل نوع ۱ مرتبه صفر
Y_γ	تابع بسل نوع ۲ مرتبه صفر
y	مختصه مکانی

واژه‌نامه

سد در حالت‌های مختلف تعیین گردید. بر این اساس می‌توان نتایج را به شرح زیر بیان کرد:

۱- روش گالرکین با دقت بسیار خوبی قادر به تحلیل ارتعاش آزاد سد است و نتایج حاصل از آن قابل اعتماد می‌باشد.

۲- ارتعاش آزاد جانبی سدهای بتنی مثلثی شکل به صورت توابع بسل مرتبه اول نوع یک و دو و اصلاح شده نوع یک و دو بوده و براساس آن می‌توان مقادیر بسامدهای زاویه‌ای در ارتعاش آزاد جانبی را به صورت دقیق تعیین نمود.

۲- ارتعاش آزاد محوری سدهای بتنی مثلثی شکل به صورت تابع بسل مرتبه اول نوع یک است و براساس آن می‌توان مقدار بسامدهای طبیعی در ارتعاش آزاد محوری را به صورت دقیق تعیین نمود.

۳- شبیه‌سازی سازه فوقانی سد به صورت جرم یا نیروی متمرکز نشان می‌دهد که سازه فوقانی تأثیری قابل ملاحظه‌ای بر بسامد ارتعاش آزاد جانبی و محوری سد در نظریه‌های اوپلر-برنولی و رابلی ندارد. در حالی که در نظر گرفتن آن به صورت قطعه‌ای با مساحت ثابت در ارتفاع لزوم در نظر گرفتن سازه فوقانی را اجتناب‌ناپذیر می‌نماید.

۴- نظریه اوپلر-برنولی در ارتعاش جانبی و نظیر آن در ارتعاش محوری همواره بسامدهای بزرگ‌تری در قیاس با تئوری رابلی نتیجه می‌دهد که در موده‌های پایین‌تر این اختلاف کم‌تر ولی در موده‌های بالاتر به‌ویژه برای ارتعاش جانبی قابل توجه است. بنابراین استفاده از نظریه اوپلر-برنولی در تحلیل ارتعاش آزاد سدها در موده‌های بالاتر خطای قابل توجهی را در پی خواهد داشت.

فهرست علائم

M	جرم بخش مثلثی سد
m	جرم بخش فوقانی سد
h	ارتفاع سد
Δh	ارتفاع آزاد سد
E	ضریب کشسانی
I	ممان اینرسی
u	تغییر مکان جانبی در مختصات مکانی
C	ماتریس میرایی
ρ	جرم حجمی
A	مساحت نیمرخ طولی
P	نیروی محوری
q	بارگسترده جانبی
$\bar{u}$	تغییر مکان جانبی در مختصات مکانی زمانی

variational methods	روش های تغییرات	section	نیمرخ
Galerkin weighted residual method	روش مانده وزنی گالرکین	Roller Compacted Concrete, RCC	بتن غلتکی کوبیده
nonconservative	ناپایستار	classic	متداول
functionally graded materials, FGM	مصلح مدرج تابعی	Rotary inertia	اینرسی دورانی
differential transform method, DTM	روش تبدیل دیفرانسیلی	Euler-Bernoulli Beam Theory, EBT	نظریه تیر اویلر-برنولی
Comparison functions	تابع قیاسی	Elementary beam theory, EBT	نظریه مقدماتی تیر
Collocation method	روش ترتیبی	Engineering beam theory, EBT	نظریه مهندسی تیر
nontrivial	غیربدیهی	Elastic	کشسان
		natural frequency	بسامد طبیعی

مراجع

- [1] Rao, S.S., *Vibration of Continious Systems*, Jhon Wiley&Sons, Hoboken, New Jersey, USA, 2007.
- [2] Rayleigh, B., *The Theory of Sound*, Volume 1, London: Macmillan, reprinted by Dover, New York, USA, 1945.
- [3] Ritz, W., Über eine neue methode zur losung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 135, pp. 1-61, (1909). <http://eudml.org/doc/149295>.
- [4] Mabie, H. H., and Rogers, C. B., Transvers vibration of double-tapered cantilever beams, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51, pp. 1771-1774, (1972). <https://doi.org/10.1121/1.1913028>.
- [5] Mabie, H. H., and Rogers, C. B., Transverse vibration of tapered cantilever beams with end support, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 44, 1739-1741, (1968). <https://doi.org/10.1121/1.1911327>.
- [6] Carnegi W, & Thomas, J., The coupled bending –bending vibration of pre-twisted tapered blading, *Journal of Engineering for Industry*, 94(1), pp. 255-266, (1972). <https://doi.org/10.1115/1.3428120>.
- [7] Goel, R.P., Vibration of a beam carrying a concentrated mass, *Journal of Applied Mechanics*, 40(3), pp. 821-822, (1973). [https://doi.org/10.1016/0022-460x\(76\)90403-x](https://doi.org/10.1016/0022-460x(76)90403-x).
- [8] Hibler, R.C., Free Vibration of a beam support by unsymmetrical spring-hinges, *Journal of Applied Mechanics*, 42, pp. 501-502, (1975). <https://doi.org/10.1115/1.3423612>.
- [9] Lau, J.H., Vibration frequencies of tapered bars with end mass, *Journal of Applied Mechanics*, 51(1), pp.179-181. (1984). <https://doi.org/10.1115/1.3167564>.
- [10] Ece, M., C., Aydogdu, M., Taskin, V., Vibration of a variable cross-section beam, *Mechanics Research Communications*, 34(1), 78-84, (2007). <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2006.06.005>.
- [11] Shahba, A., Rajasekaran, S., Free Vibration and stability of Tapered Euler-Bernoulli Beams made of axially functionally graded materials, *Applied Mathematical Modelling*, 36(7), 3094-3111, (2012). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.09.073>.
- [12] Banerjee, R., Williams, F.W., Exact Bernouli-Euler Static Stiffness matrix for a range of Tapered beam-Coulmns, *Int. J., Numerical Method in Engineering*, 23(9), pp. 1615-1628, (1986). <https://doi.org/10.1002/nme.1620230904>.
- [13] Arbate, S., Vibration of non-uniform rods and beams, *J. of Sound and Vibration*, 185(4), pp. 703-716, (1995). <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0410>.

- [14] Ece, M.C., Aydogdu, M., Taskin, V., Vibration of Variable cross-section beam, *Mechanics Research Communications*, 34(1), pp. 78-84, (2007). <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2006.06.005>.
- [15] Mou, Y., Han, R.S.P., Shah, A.H., Exact Dynamic stiffness matrix for beams of arbitrary cross section, *I. J. of Numerical Method in Engineering*, 40(2), 233-250, (1997). [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970130\)40:2<233::AID-NME61>3.0.co;2-0](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970130)40:2<233::AID-NME61>3.0.co;2-0).
- [16] Fenves, G., Chopra, A.K. "Earthquake Analysis and Response of Concrete Gravity Dams", Report No. UCB/EERC-84/10, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, Calif., (1984).
- [17] Miquel, B., Bouaanani, N., Simplified evaluation of the vibration period and seismic response of gravity dam-water systems, *Engineering Structures*, 32, pp.2488-2502, (2010).
- [18] Attarnejad, R., Farsad, A., Closed Form Solution of Dam Reservoir Interaction in Time Domain considering dam thickness, *Journal of Technical Faculty*, 39(3), pp. 329-340, (2005) [In Persian]. <https://www.sid.ir/paper/14328/en>.
- [19] Attarnejad, R., Ghorbani-Tanha, A.K., A General fourth order ordinary differential equation with solution in terms of Bessel Function, Theory and Engineering Application, *Structural Engineering and Mechanics*, 27(6), pp. 773-776. (2007). DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2007.27.6.773>.
- [20] Elyasi, P., Navayi Neyaa, B., Rahmani Firoozjaee, Free vibration analysis of viscoelastic non-locally damped Rayleigh beam using Galerkin method, null space of the matrix & Neumann series expansion, *J. of Modares civil*, 22(5), pp. 63-76, (2022). [In Persian]. https://mcej.modares.ac.ir/browse.php?a_id=56385&sid=16&slc_lang=en.
- [21] Elyasi, P., Navayi Neyaa, B., Rahmani Firoozjaee, 2023. Free vibration of viscoelastic nonlocally damped tapered axially functionally graded beams using the state-space formulation, *Engineering Structures* (2023). <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116183>.