Towards Mathematical Sciences

Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 1–8

DOI.10.22067/tmsj.2023.43621

Expository Article

INTEGRATION BY PARTS AND INFINITE SERIES

MOHAMMAD MOMENI KOHESTANI[1*] AND ALIREZA KHALILI ASBOEI[2]

[1]Bachelor of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran

[2]Department of Mathematics, Farhangian University, Tehran, Iran

Abstract. In this paper, by using a student's calculation error in applying the integration formula using the subtraction method and reaching the correct answer, we reached the following formula $\int fg = \Sigma_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)}$ where $g^{-(k)}$ is the k th successive antiderivative of g and $f^{(k)}$ is the k th derivative of f . We find by using the above series and Maclaurin series, interesting results about the convergence of some series. Also, due to the introductory nature of the integration formula using the subtraction and the infinite series, this series can be new topics for the next research is to provide researchers with a new method for deriving series and discovering new series.

2020 Mathematics Subject Classification. 42C15, 42C40

Keywords. Frames, dual frames, optimal duals, reconstruction formulas

Date: Rceived 15-7-2021 Revised 9-11-2021 Accepted 21-11-2021 Available Online 7-12-2021

[*]Corresponding author

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۱–۸
DOI. 10.22067/tmsj.2023.43621
مقاله علمی–ترویجی، ترجمه

انتگرال‌گیری جزء به جزء و سری‌های نامتناهی

امیرمحمد مومنی کوهستانی[1*] و علی رضا خلیلی اسبوئی[2]

[1] دانشگاه مازندران، مازندران، ایران
amirmomeni526@gmail.com
[2] گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران
khaliliasbo@yahoo.com

چکیده. مقاله حاضر ترجمه‌ای است از

S.J. Kilmer, *Integration by Parts and Infinite Series*, Mathematics Magazine, 81 (2008), no. 1, 51–55.

در این مقاله با استفاده از اشتباه محاسباتی یک دانش‌آموز در به‌کارگیری فرمول انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء و رسیدن به جواب صحیح، فرمول $\int fg = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)}$ به‌دست می‌آید که در آن $g^{-(k)}$، k–امین پادمشتق متوالی g و $f^{(k)}$، k–امین مشتق متوالی f است. با استفاده از سری فوق و سری مک‌لوران به نتایج جالبی در مورد همگرایی بعضی از سری‌ها دست می‌یابیم.

۱. انتگرال‌گیری جزء به جزء و سری

همه ما دانش‌آموزانی داشته‌ایم که پس از انجام یک اشتباه مفتضحانه در ابتدای محاسبات، به تقلاکردن ادامه داده‌اند؛ غافل از این‌که نتیجه‌شان چقدر غیرمنطقی و بغرنج باشد. به‌ندرت چنین تلاش‌هایی مانند آن‌چه یک

2020 Mathematics Subject Classification. 47A55, 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. انتگرال‌گیری جزء به جزء، سری‌های نامتناهی، بسط مک‌لوران.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۶/۳ بازنگری ۱۴۰۱/۲۶/۷ پذیرش ۱۴۰۱/۱۲/۱۵ انتشار برخط ۱۴۰۱/۱۲/۱۹

* نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: ا.م. مومنی کوهستانی، ع.ر. خلیلی اسبوئی، انتگرال گیری جزء به جزء و سری‌های نامتناهی، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۸–۱.

دانشجوی ترم دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داده و راه حل زیر را در امتحان نهایی خود ارائه کرده بود، جواب می‌دهد:

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= (\frac{x^2}{2}e^x - \frac{x^3}{3!}e^x + \frac{x^4}{4!}e^x - \frac{x^5}{5!}e^x + \dots) + C \\ &= -e^x + xe^x + e^x(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots) + C \\ &= xe^x - e^x + e^x e^{-x} + C \\ &= xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

در ابتدا استادی که امتحان را تصحیح می‌کند چنین فکر کرد که می‌تواند نمره کمی برای این کار قائل شود، زیرا دانش‌آموز به صورت وارونه f و g را در فرمول معمول انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء یعنی

$$\int fg = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)},$$

انتخاب کرده بود. در این‌جا g^{-k} نشان‌دهنده k-امین پادمشتق متوالی g، $f^{(k)}$ نمایش k-امین مشتق f و $f^{(n)}$ ثابت است. با این‌حال، چون پاسخ صحیح بود تصمیم گرفت به کار او توجه بیشتری کند. از آنجایی که $f^{(k)}$ هرگز ثابت نبود، واضح بود که او به طور ضمنی شکل سری زیر را برای حل فرض کرده بود:

$$\int fg = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)} g^{-(k+1)}. \tag{۱.۱}$$

در این محاسبات سری (۱.۱) راه حل صحیح را ارائه کرد، اما آیا این روش تیری در تاریکی بود یا می‌توان از این روش برای یافتن نمایش‌های معتبر دیگری به صورت سری استفاده کرد؟

در ادامه مقاله سری (۱.۱) را سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌نامیم. بیایید ابتدا سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء را برای توابع سینوس و کسینوس مشخص سازیم و سپس آن‌ها را با بسط مک لوران‌شان مقایسه کنیم. در پایان مقاله به همگرایی (۱.۱) خواهیم پرداخت.

$$\begin{aligned}\sin x &= \int_0^x \cos t dt \\ &= x\cos x + \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{x^3}{3!}\cos x - \frac{x^4}{4!}\sin x + \frac{x^5}{5!}\cos x + \frac{x^6}{6!}\sin x \dots \\ &= \cos x(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} ...) + \sin x(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} \dots) \\ &= \cos x(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} ...) - \sin x(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots) + \sin x\end{aligned}$$

از این رو اگر فرض کنیم

$$\sigma_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \sigma_c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

خواهیم داشت

$$\sigma_s \cos x - \sigma_c \sin x = 0. \tag{۲.۱}$$

به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}
1 - \cos x = &\int_0^x \sin t dt \\
=& x \sin x - \frac{x^2}{2}\cos x - \frac{x^3}{3!}\sin x + \frac{x^4}{4!}\cos x + \frac{x^5}{5!}\sin x - \frac{x^6}{6!}\cos x \dots \\
=& \sin x(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\dots) + \cos x(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\dots) \\
=& \sin x(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\dots) + \cos x(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\dots) \\
&- \cos x.
\end{aligned}$$

بنابراین با در نظر گرفتن σ_s و σ_c به‌صورت بالا خواهیم داشت:

$$\sigma_c \cos x + \sigma_s \sin x = 1. \tag{۳.۱}$$

با حل هم‌زمان رابطه‌های (۲.۱) و (۳.۱) داریم

$$\sigma_s = \sin x, \sigma_c = \cos x$$

و این نشان می‌دهد که این روش در واقع نمایش‌های درست سری برای $\sin x$ و $\cos x$ را حاصل می‌کند، در حقیقت سری مک‌لوران آن‌ها به‌دست می‌آید.

عدد π را در نظر میگیریم. راه‌های مختلفی برای یافتن سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء مناسبی برای محاسبه عدد π وجود دارد. اولین روشی که ارائه می دهیم، با استفاده از این واقعیت است که π مساحت دایره واحد است. قرار می‌دهیم

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)...5.3.1.$$

در این‌صورت،

$$\begin{aligned}
\pi &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\
&= 4\int_0^1 \sqrt{1+x}\sqrt{1-x}dx \\
&= 4[-\frac{2}{3}\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!}{2^k(\sqrt{1+x})^{2k-1}}.\frac{(-1)^{k+1}2^{k+1}(\sqrt{1-x})^{2k+3}}{(2k+3)!!}]\Big|_0^1 \\
&= 4[-\frac{2}{3}\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{1-x})^{2k+3}}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)(\sqrt{1+x})^{2k-1}}]\Big|_0^1 \\
&= \frac{8}{3} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)} \\
&= 8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)}.
\end{aligned}$$

روش تجزیه به کسرهای جزئی نیز می‌تواند برای یافتن این سری به‌کار آید. لس رید[۱] همکاری از دانشگاه ایالتی میسوری، مثال زیبای زیر را برای یک سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء با استفاده از تابع $\arctan$ برای محاسبه π به‌دست آورد. با در نظر گرفتن $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ و استفاده از تجزیه کسرها داریم

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}).$$

با استفاده از روش سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+a} &= \frac{x}{x+a} + \frac{1}{2}(\frac{x}{x+1})^2 + \frac{1}{3}(\frac{x}{x+a})^3 + \frac{1}{4}(\frac{x}{x+a})^4 + \cdots + C \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{x}{x+a})^k.
\end{aligned}$$

[۱] Les Reid

بنابراین

$$\begin{aligned}
\pi &= 4\arctan 1\\
&= 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\\
&= \frac{2}{i}\int_0^1 (\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i})dx\\
&= \frac{2}{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[(\frac{1}{1-i})^k - (\frac{1}{1+i})^k]_0^1\\
&= \frac{2}{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+i)^k-(1-i)^k}{2^k k}\\
&= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^k(e^{\frac{\pi k i}{4}} - e^{\frac{-\pi k i}{4}})}{2^k k.2i}\\
&= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi k}{4}}{2^{\frac{k}{2}}k}.
\end{aligned}$$

در برخی شرایط، روش سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌تواند برای یافتن مجموع یک سری مورد استفاده قرار گیرد. در این‌جا می‌خواهیم مجموع زیر را برای $n \geq 1$ محاسبه کنیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+n)}.$$

این مقدار به صورت یک ثابت در معادله زیر ظاهر می‌شود:

$$\begin{aligned}
\int x^{n-1}\ln x dx &= \frac{x^n}{n}\ln x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n+k}(n-1)!}{(n+k)!}.\frac{(-1)^{(k+1)}(k-1)!}{x^k} + C\\
&= \frac{x^n}{n}\ln x - x^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{(n+k)!} + C\\
&= \frac{x^n}{n}\ln x - x^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)} + C
\end{aligned}$$

مشتق‌گیری از هر دو طرف، ثابت انتگرال را حذف می‌کند.

$$x^{n-1}\ln x = x^{n-1}\ln x + \frac{x^{n-1}}{n} - nx^{n-1}(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)}$$

با ساده‌کردن این معادله خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)} = \frac{1}{n!n}.$$

نتیجه به‌دست آمده از طریق قاعده تلسکوپی نیز قابل محاسبه است.

حال به همگرایی سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌پردازیم. به طور کلی شرایط همگرای این سری‌ها به‌راحتی قابل بررسی است. با چند بار استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{-(k+1)}(t)g^{(k)}(t)\Big|_a^b + (-1)^{n-1}\int_a^b f^{-(n)}g^{(n)}(t)dt, \quad (۴.۱)$$

از این رو به منظور تعیین همگرایی سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء کافی است نشان دهیم که انتگرال سمت راست (۴.۱) به صفر میل می‌کند. اما

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f^{-(n)}g^{(n)}(t)dt\Big| &\leq \int_a^b {}^{-(n)}g^{(n)}(t)\big|dt \\ &\leq (b-a)\sup|f^{-(n)(t)g^{(n)}(t)}| : a < t < b.\end{aligned}$$

بنابراین یک سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء مربوط به انتگرال متناظرش، درصورتی همگراست که

$$\sup\{|f^{-(n)(t)g^{(n)}(t)}| : a < t < b\} \to 0. \quad (۵.۱)$$

به عنوان مثال همگرایی دومین سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء را برای π که در بالا ارائه شده است بررسی می کنیم. از آن‌جا که

$$\pi = 4\arctan 1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{i}\int_0^1 (\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i})dx,$$

کافی است نشان دهیم سری حاصل از انتگرال گیری جزء به جزء برای $\int_0^1 (x+a)^{-1}dx$ که در آن $a = \pm i$ همگراست. به این منظور، فرض کنید

$$f(x) = 1,\ g(x) = (x+a)^{-1}.$$

فرض کنید n یک عدد نامنفی باشد، در این صورت توابع $\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$ و x^n روی بازه $[0,1)$ صعودی اند و در نتیجه ترکیب آن‌ها نیز صعودی است و داریم:

$$\begin{aligned}&\sup\{|f^{-(n)}(x)g^{(n)}(x)| : 0 < x < 1\} \\ &= \sup\{|\frac{x^n}{n!}\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}| : 0 < x < 1\} \\ &= \sup\{(\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}})^n.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : 0 < x < 1\} \quad \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n.1 \to 0.\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۵.۱) نتیجه می شود این سری حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء به π همگرا است.

از آن‌جایی که معیارهای همگرایی یک سری حاصل از انتگرال‌گیری به راحتی قابل بررسی هستند و به دلیل تنوع در فرم، سری‌های حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانند کاربرد گسترده‌ای داشته باشند. همچنین، به دلیل ماهیت مقدماتی انتگرال جزء به جزء و سری‌های نامتناهی، موضوعات جدیدی برای کلاس درس و پروژه‌های دانشجویان سطح بالاتر فراهم می‌شوند و این روش به ریاضیدانان راه‌هایی برای به دست آوردن سری‌ها و قابلیت کشف سری‌های جدید را ارائه می‌کند.

در پایان ذکر این مطلب ضروری است که این مقاله، ترجمه مقاله [۱] بوده است.

۲. تقدیر و تشکر

مترجمین از داوران محترم در خواندن نسخه اولیه، راهنمایی‌های ارزنده‌شان و کمک به بهبود ترجمه کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

[1] S.J. Kilmer, *Integration by parts and infinite series*, Mathematics Magazine, 81 (2008), no. 1, 51–55. http://www.jstor.org/stable/27643080