



ABOUT FUZZY STRUCTURES IN MATHEMATICAL ANALYSIS

MANOUCHEHR SHAHAMAT^{1*}, ALI GANJBAKHSH SANATEE², OMID YOUSEFI KIA³,
AND ALI SHAHIDIKIA⁴

^{1,3,4}Department of Mathematics, Dezful branch, Islamic Azad University, Dezful, IRAN
m.shahamat@iaud.ac.ir
omidyk2011@gmail.com
a.shahidikia@gmail.com

²Faculty of Mathematical Sciences, Department of Mathematics, University of Quchan, Iran
a.ganjbakhsh@qiet.ac.ir

Abstract. In the present article, we examine continuous phases using analytical structures. Based on our analysis of the concepts of continuity and differentiability in the continuous phase, we study the behavior of systems and their applications. Mathematical analysis structures such as continuity, sequences, differentiability, uniformly continuous sequences of functions, and so forth, are not only extensively used in the examination and analysis of the properties of phase function structures, but they also have led to the development of new perspectives in the theory of classical phase models. We demonstrate how differentiable phases introduce systems. Additionally, we study uniformly continuous phases and trace the behavior of systems by examining the behavior of sequences of other systems.

2010 Mathematics Subject Classification. 37B10.

Keywords. fuzz, continuous, differentiable

Date: Received 23-9-2023 Revised 10-5-2024 Accepted 28-5-2024 Available Online 30-7-2024

©Ferdowsi University of Mashhad.



پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی

منوچهر شهامت^{1*}، علی گنج بخش صنعتی²، امید یوسفی کیا³، و علی شهیدی کیا³

^{1,3,4} گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول، دزفول، ایران

¹m.shahamat@iaud.ac.ir

³o.yousefikia@iaud.ac.ir

⁴alishahidikia@iaud.ac.ir

² گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران

a.ganjbakhsh@qiet.ac.ir

چکیده. در مقاله حاضر به بررسی فازهای پیوسته به کمک ساختارهای آنالیزی می‌پردازیم. با توجه به تحلیلی که از مفهوم پیوستگی و مشتق‌پذیری در فاز پیوسته داریم، رفتار سیستم‌ها و کاربرد آنها را بررسی می‌کنیم. ساختارهای مباحث آنالیز ریاضی مانند پیوستگی، دنباله، مشتق‌پذیری، دنباله توابع بطور یکنواخت پیوسته و غیره نه تنها در بررسی و تحلیل خواص ساختارهای توابع فاز کاربردهای فراوانی دارد، بلکه باعث بوجود آمدن نگرش‌های جدیدی در نظریه مدل فاز کلاسیک نیز شده است. نشان می‌دهیم فازهای مشتق‌پذیر چگونه سیستم‌ها را معرفی می‌کنند. همچنین فازهای بطور یکنواخت پیوسته را مطالعه می‌کنیم و رفتار سیستم‌ها را با بررسی رفتار دنباله‌ای از سیستم‌های دیگر پیگیری می‌کنیم.

2010 Mathematics Subject Classification. 37B10.

واژگان کلیدی. فاز، پیوسته، مشتق‌پذیر.

تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۷/۱ بازنگری ۱۴۰۳/۲/۲۱ پذیرش ۱۴۰۳/۳/۸ انتشار برخط ۱۴۰۳/۵/۹

نحوه ارجاع به این مقاله: م. شهامت، ع. گنج بخش صنعتی، ا. یوسفی کیا، ع. شهیدی کیا، پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۱-۱۷.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. پیش‌گفتار

فرآیند مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های دنیای واقعی، غالباً دقیق نیستند. در نتیجه این مدل‌سازی‌ها نیز کارایی لازم برای راه‌حل مسائل دنیای واقعی را ندارند.

سیستم فازی^۱ برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی‌زاده^۲ معرفی شد. لطفی‌زاده به ناتوانی ریاضیات کلاسیک در برخورد به مسائل نادقیق اشاره کرد و بدین‌منظور نظریه فازی را برنامه‌ریزی کرد [۴].

برای مقایسه منطق فازی و منطق کلاسیک، فرض کنید یک سیستم فازی طراحی شده است که توسط آن می‌توان میزان امانت‌داری افراد را مشخص کرد. در مقابل براساس یک سیستم دیجیتال یا منطق کلاسیک نیز امانت‌داری افراد اندازه‌گیری و تعیین می‌شود. به شکل ۱ و تفاوت نتایج حاصل از این دو سیستم توجه کنید. مشخص است که نمی‌توان در مورد امانت‌داری در منطق فازی به‌طور قطع نظر داد در حالی‌که در منطق کلاسیک این‌کار به راحتی امکان‌پذیر است.

به‌عنوان مثالی دیگر می‌توان به کاربرد منطق فازی در ماشین‌های شستشوی لباس اشاره کرد. ماشین‌های لباس‌شویی مدرن از منطق فازی استفاده می‌کنند. آنها سنسورهایی دارند که به‌طور مداوم تغییرات دما را ردیابی می‌کنند. بر این اساس کنترل‌ها و عملیات را تنظیم می‌کنند. این سیستم‌ها عملکرد خوبی دارند. منطق فازی فرآیند شستشو، دمای آب، سرعت چرخش، زمان شستشو، مصرف آب و عملکرد آبکشی را کنترل می‌کند.

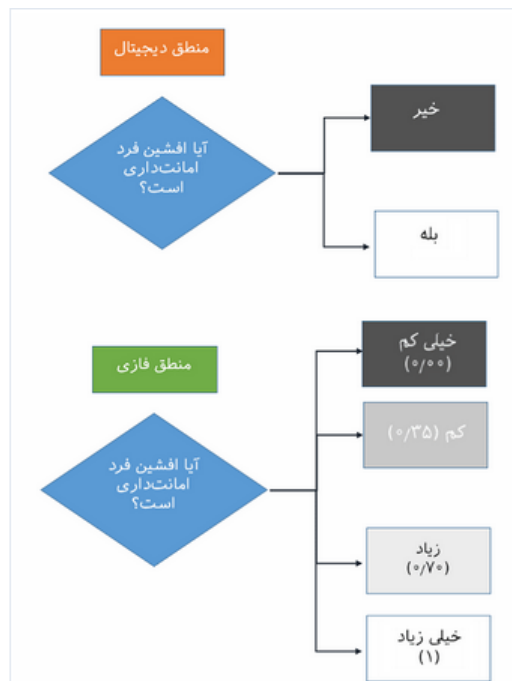
با این وجود سیستم‌های فازی نیز در بعضی موارد ناتوان هستند [۵]. مشخص است که نمی‌توان منطق فازی را راه‌حلی جامع برای همه مسائل دانست. بنابراین مهم است که بدانیم در چه مواقعی نباید از منطق فازی استفاده کرد. از آنجایی که برمبنای قوانین از پیش تعیین شده، فرآیند تصمیم‌سازی برمبنای منطق فازی صورت می‌گیرد، اگر این قوانین دچار نقص یا اشکال باشند، ممکن است نتایج اصلاً قابل قبول نباشند. از طرفی پیاده‌سازی منطق فازی در سخت‌افزارهای رایج احتیاج به آزمایش‌های متعدد و زمان‌بر دارد. در زیر به معرفی زمینه‌هایی می‌پردازیم که بهتر است از منطق فازی استفاده نشوند:

- (۱) زمانی که از حواس پنج‌گانه استفاده می‌شود، منطق فازی کارساز نیست.
- (۲) اگر روش‌های کنترل و تصمیم‌گیری بدون منطق فازی به خوبی کار می‌کنند، پس احتیاجی نیست که آن‌ها را به منطق فازی تبدیل کنیم.
- (۳) الگوریتم‌های فازی نیاز به اعتبارسنجی و تأیید گسترده دارند.
- (۴) سیستم‌های کنترل فازی به تخصص و دانش انسان وابسته هستند.

فاز پیوسته تعمیمی از فاز کلاسیک با دامنه نامتناهی است. بسیاری از نتایج فاز کلاسیک، به فاز پیوسته تعمیم داده شده‌اند. در دنیای واقعی ابهام وجود دارد اما بعضی مواقع لازم نیست از جملات دقیق استفاده کرد. برای مثال جمله "هوا گرم است." را در نظر بگیرید. این جمله با وجودی‌که دقیق نیست، اما مفهوم آن مشخص

^۱Fuzzy System

^۲Lotfizadeh



شکل ۱: مقایسه ریاضی فازی و کلاسیک.

است در صورتی که اگر برای رساندن منظورمان از جمله دقیق ”دمای هوا ۳۰ درجه است.“ استفاده می‌کردیم، کارایی کمتری داشت. در اواسط قرن بیستم این ضعف برای سیستم‌های کنترل آشکارتر شد زیرا قرار بود از ماشین به جای انسان استفاده شود.

واژه فازی معانی مختلفی دارد که از آن جمله می‌توان به واژه‌های ”مبهم“ و ”گنگ“ اشاره کرد. در نظریه فازی امکان مدل‌سازی کمیت‌های روزمره مانند ”کم، متوسط و زیاد“ را دارد که در ریاضیات کلاسیک قابل بیان نیستند. نظریه فازی سعی می‌کند هر اندازه که ممکن است فاصله بین مدل و واقعیت را کمتر کند. در سیستم فازی می‌توان مفاهیم مبهمی مانند کم، متوسط و زیاد را تعریف و از آن‌ها به خوبی استفاده کرد. در بخش ۲، به بررسی مقدمات توابع فازی می‌پردازیم. در بخش ۳، مقدماتی از آنالیز ریاضی را بیان کرده و وارد مبحث فازهای پیوسته می‌شویم. در بخش ۴، مفهوم فازهای مشتق‌پذیر را بیان کرده و توابع فازی را از نظر شهودی بررسی می‌کنیم.

۲. مفاهیم اولیه، تعاریف و قضایا

در مجموعه‌های کلاسیک برای یک عضو فقط دو حالت رخ می‌دهد. یک عضو یا به مجموعه متعلق است یا متعلق نیست، زیرا در این مجموعه‌ها مرز مشخص است. مانند اعداد طبیعی بزرگتر از 10 که بصورت $\{x \in \mathbb{N} : x > 10\}$ نشان داده می‌شود. اعداد طبیعی بزرگتر از 10 دقیق و خوش‌تعریف است. اما چنانچه

گفته شود "اعداد طبیعی خیلی بزرگتر از ده" آنگاه عبارت خیلی بزرگ یک مفهوم مبهم و غیردقیق است. در اینجا برای مثال عدد 9 اصلا به مجموعه تعلق ندارد اما عدد 16 کمی به مجموعه تعلق دارد و تعلق عدد 1234 به مجموعه بیشتر از تعلق عدد 16 است.

می‌توان به میزان عضویت یک عنصر، عددی را نسبت داد. اگر μ به عنوان میزان تعلق عضوی از مجموعه کلاسیک A در نظر گرفته شود، آنگاه

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

اما چنانچه μ را به عنوان میزان تعلق برای مجموعه فازی \tilde{A} در نظر بگیریم، آنگاه

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 < \mu(x) \leq 1, & x \in \tilde{A}, \\ 0, & x \notin \tilde{A}. \end{cases}$$

یک مجموعه فازی از طریق تابع عضویت آن مشخص می‌شود که نموداری هموار دارد و با طرز فکر بشر بیشتر در تطابق است. در صورتی که منحنی تابع عضویت یک مجموعه کلاسیک پله‌ای 0 و 1 بوده و نمی‌تواند طرز فکر دقیق فرد را مشخص نماید. در مجموعه‌های فازی باید اعضا و میزان عضویت مشخص باشد.

تعریف ۱.۲ ([۲]). فرض کنیم X مجموعه مرجع^۳ باشد. مجموعه فازی \tilde{A} تعریف شده روی X عبارت است از اعضای X و میزان عضویت $\mu_A(x)$ ، که در آن μ_A تابع عضویت از X به $[0, 1]$ می‌باشد و میزان عضویت عناصر A را مشخص می‌کند. در واقع

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : \mu_A : X \rightarrow [0, 1]\}.$$

در حالت کلی مجموعه‌های فازی بصورت زوج مرتب نوشته می‌شوند. در صورتی که مجموعه مرجع گسسته^۴ باشد، آنگاه هر عضو و میزان عضویت آن در یک پرانتز نوشته می‌شود.

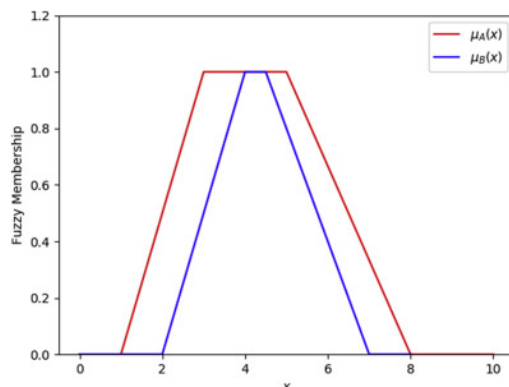
یادآوری ۲.۲. در این مقاله برای سهولت از نماد $\tilde{A}(x)$ به جای نماد $\mu_A(x)$ استفاده می‌کنیم. به همین علت به جای مجموعه فاز از تابع فاز نیز می‌توان استفاده کرد.

مثال ۳.۲. اگر مجموعه مرجع را $\{3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ در نظر بگیریم، آنگاه یک مجموعه فازی برای اعداد بزرگتر از 3 بصورت زیر است:

$$\{(3, 0), (4, 0.1), (5, 0.4), (6, 0.6), (9, 0.9), (10, 1)\}.$$

³Reference Set

⁴Discrete



شکل ۲: توابع فاز برای عدد نزدیک به ۴.

در صورتی که مجموعه مرجع پیوسته^۵ باشد، آنگاه مجموعه فازی و تابع عضویت آن بصورت یک تابع نوشته می‌شوند.

مثال ۴.۲. اگر مجموعه مرجع را اعداد حقیقی نامنفی در نظر بگیریم، آنگاه یک مجموعه فازی برای اعداد طبیعی نزدیک به صفر بصورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\{(x, e^{-x}) : x > 0\}.$$

تعریف ۵.۲ ([۳]). فرض کنیم \tilde{A} یک مجموعه فازی از E باشد. تکیه‌گاه \tilde{A} را با نماد $\text{supp}(\tilde{A})$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{e \in E : \tilde{A}(e) > 0\}.$$

برای نمونه در مثال ۳.۲ داریم $\text{supp}(\tilde{A}) = \{4, 5, 6, 9, 10\}$ و برای مثال ۴.۲،

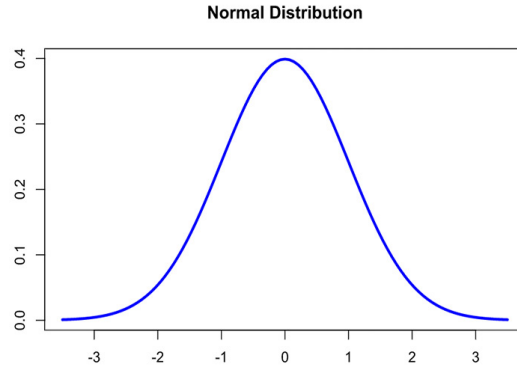
$$\text{supp}(\tilde{A}) = (0, \infty).$$

واضح است که توابع فازی تعریف شده بر یک مجموعه مرجع، یکتا نیستند. شکل ۲ نمایش دو تابع فازی برای اعداد نزدیک به ۴ است.

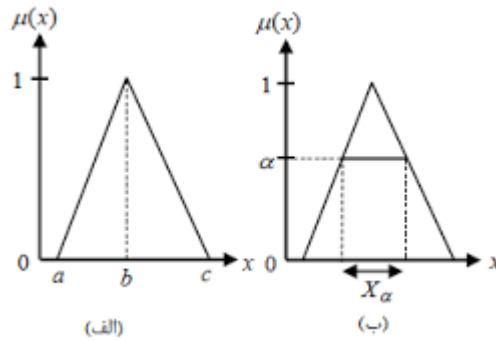
تعریف ۶.۲ ([۶]). مجموعه فازی \tilde{A} از E را نرمال^۶ گوئیم، هرگاه عضوی از E مانند e وجود داشته باشد که $\tilde{A}(e) = 1$.

⁵Continuous

⁶Normal



شکل ۳: فاز نرمال.

شکل ۴: α -برش.

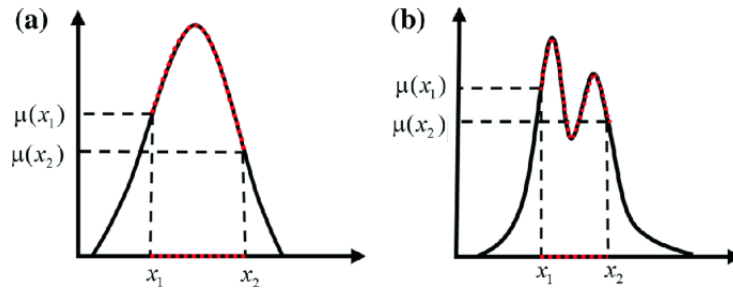
تابع فازی مثال ۳.۲ نرمال است اما برای مثال ۴.۲ چنین نیست. در فازهای نرمال همیشه عضویت قطعی^۷ وجود دارند. برای دیدن نمودار فازهای نرمال، شکل ۳ را ببینید.

تعریف ۷.۲ ([۷]). فرض کنید α عددی حقیقی باشد. مجموعه α -برش \tilde{A} را با نماد \tilde{A}_α نشان می‌دهند و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = \{e \in E : \tilde{A}(e) > \alpha\}.$$

چون ممکن است \tilde{A}_α روی همه عناصر E اثر نکند، پس ممکن است تابع فاز نباشد. شکل ۴ را ببینید.

⁷Certainty



شکل ۵: فاز محدب و نامحدب.

تعریف ۸.۲. مجموعه فازی \tilde{A} از E را محدب^۸ گوئیم، هرگاه به ازای هر دو عضو $e_1, e_2 \in E$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \leq \min\{\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2)\}.$$

هر دو مثال‌های ۳.۲ و ۴.۲ محدب هستند.

چنانچه تابع فازی محدب باشد، آنگاه اگر هر دو نقطه نمودار آن را به هم وصل کنیم، بایستی نقطه مینیمم زیر خط گذرا از آن دو نقطه قرار گیرد. به عبارت دیگر نباید دارای مینیمم نسبی باشد و تنها می‌تواند دارای مینیمم مطلق باشد که آن نیز تنها در ابتدا یا انتهای بازه رخ می‌دهد. نمودار توابع فاز محدب نمی‌توانند فرورفتگی داشته باشند و حداکثر دارای یک برآمدگی هستند. همچنین اگر در بازه‌ای نزولی باشند، بایستی در کل دامنه هم نزولی باشند.

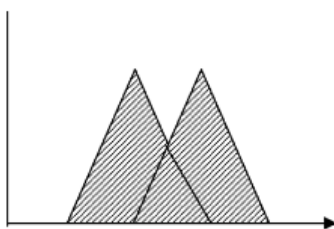
سیستم‌های فازی محدب با ساختار گنبدی شکلی که دارند تمایل به حرکت به سمت سیستم نرمال دارند. از آنجا که تفرع آنها به سمت پایین است، لذا این تمایل سیستم به کندی رخ می‌دهد. پیشبینی رفتار چنین سیستم‌هایی برخلاف دیگر سیستم‌ها امکان‌پذیر است و در نتیجه اطلاعات آنها قابل دسترسی است. نمودار فازهای محدب و نامحدب در شکل ۵ داده شده‌اند.

فرض کنیم $\{\tilde{A}_n\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف شده بر مجموعه E باشند. اجتماع و اشتراک فازهای \tilde{A}_n را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

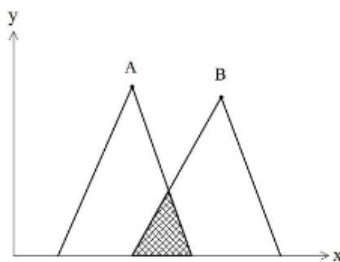
$$\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e) = \max\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\bigcap_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e) = \min\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

⁸Convex



شکل ۶: فاز بیشینه.



شکل ۷: فاز کمینه.

واضح است که اجتماع و اشتراک فازها، توابع فاز هستند. از آنجا که فاز اجتماع همیشه بیشترین عضویت و فاز اشتراک کمترین عضویت را نشان می‌دهد، پس آنها را به ترتیب فاز بیشینه و کمینه نامیده می‌شوند. فاز بیشینه تلاش می‌کند تا بیشترین رضایتمندی یا قطعیت را معرفی کند در صورتی که فاز کمینه دنبال معرفی کمترین قطعیت است. شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب فازهای بیشینه و کمینه را در حالت متناهی نشان می‌دهند. حال در قضیه‌ی بعدی به روابط بین نرمال بودن فازها با فازهای بیشینه و کمینه همچنین روابط بین تکیه‌گاه آنها می‌پردازیم.

قضیه ۹.۲. فرض کنیم $\{\tilde{A}_n\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف شده بر مجموعه E باشند. در این صورت،

(۱) دست کم یکی از فازهای $\{\tilde{A}_n\}$ نرمال است اگر و تنها اگر فاز بیشینه آنها نرمال باشد.

(۲) اگر فاز کمینه نرمال باشد، آنگاه فازهای $\{\tilde{A}_n\}$ نرمال هستند.

برهان. (۱) نخست فرض کنیم به ازای $i \in \mathbb{N}$ فاز $\{\tilde{A}_i\}$ نرمال باشد. یعنی $e_0 \in E$ وجود دارد که

$$\tilde{A}_i(e_0) = 1 \text{ پس}$$

$$\max\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

در نتیجه $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1$. بنابراین $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e)$ نرمال است.

م. شهامت، ع. گنج بخش صنعتی، ا. یوسفی کیا، و ع. شهیدی کیا

بلعکس، فرض کنیم $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e)$ نرمال باشد. پس $e_0 \in E$ وجود دارد که

$$\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1.$$

پس $i \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\tilde{A}_i(e_0) = 1$ در نتیجه \tilde{A}_i نرمال است.

(۲) فرض کنیم فاز کمینه نرمال باشد. پس $e_0 \in E$ وجود دارد که

$$\bigcap_{n \geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1.$$

در نتیجه

$$\min\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\tilde{A}_i(e_0) = 1$. در نتیجه \tilde{A}_n نرمال است.

□

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قسمت (۲) از قضیه ۹.۲ ممکن است برقرار نباشد.

مثال ۱۰.۲. فازهای \tilde{A}_1 و \tilde{A}_2 بصورت زیر نرمال هستند:

$$\tilde{A}_1 := \{(x, 1), (y, 0.5)\}, \tilde{A}_2 := \{(x, 0.5), (y, 1)\}.$$

اما واضح است که

$$\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 = \{(x, 0.5), (y, 0.5)\}$$

نرمال نیست.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم $\{\tilde{A}_n\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف شده بر فضای E باشند. در این صورت:

$$\text{supp}\left(\bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n\right) = \bigcup\{\text{supp}(\tilde{A}_n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (۱)$$

$$\text{supp}\left(\bigcap_{n \geq 1} \tilde{A}_n\right) = \bigcap\{\text{supp}(\tilde{A}_n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (۲)$$

□

برهان. باتوجه به تعریف فاز بیشینه و کمینه، اثبات بدیهی است.

مثال ۱۲.۲. اگر مجموعه مرجع را اعداد حقیقی مثبت در نظر بگیریم، آنگاه توابع فازی \tilde{A}_1 و \tilde{A}_2 را برای افراد

قد بلند بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ -0.5 + x, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ 1, & 1.5 \leq x, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 1.5, \\ x - 1, & 1.5 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

در این صورت فاز بیشینه و کمینه بصورت زیر هستند:

$$\tilde{A}_1(x) \cap \tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 1.5, \\ x - 1, & 1.5 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_1(x) \cup \tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 1.5, \\ -0.5 + x, & 1.5 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

در این مثال فاز بیشینه تمایل دارد تا حد امکان افراد را قبل‌بند معرفی نماید اما فاز کمینه تمایل دارد تا برای افراد قبل‌بند شرایط سخت‌تری در نظر بگیرد و تا حد امکان افراد را قبل‌بند لحاظ نمی‌کند.

یکی از کاربردهای فازهای کمینه کمک به تصمیم‌گیری‌های فازی است. مثال بعد چنین مطلبی را بیان می‌کند.

مثال ۱۳.۲. یک شرکت ساختمانی زمین‌هایی با مساحت 150، 200، 280، 350، 750، 1200 متر مربع دارد. می‌خواهد از بین آنها زمین مناسبی برای ساختن مجتمع 8 واحدی انتخاب کند. فرض کنید توابع فازی زمین مناسب و زمین بزرگ بصورت زیر باشند:

$$\tilde{L} = \{(0, 150), (0.1, 300), (0.3, 280), (0.6, 350), (0.8, 500), (1, 750)\},$$

$$\tilde{S} = \{(0.8, 150), (1, 300), (1, 280), (0.7, 350), (0.3, 500), (0, 750)\}.$$

مایلم زمین بهینه را بیابیم.

چون زمین مورد نظر باید هر دو خاصیت مناسب و بزرگ بودن را داشته باشد، پس باید اشتراک آنها را در نظر بگیریم.

$$\tilde{L} \cap \tilde{S} = \{(0, 150), (0.1, 300), (0.3, 280), (0.6, 350), (0.3, 500), (0, 750)\}.$$

حال باید زمینی را انتخاب کنیم که بیشترین مقدار عضویت را داشته باشد. پس انتخاب بهینه زمین با مساحت 350 متر مربع است.

۳. توابع بطور یکنواخت پیوسته

تعاریف و نمادهای این بخش از مرجع [۷] گرفته شده‌اند.

تعریف ۱.۳. مجموعه E در صورتی یک فضای متری است که به هر دو نقطه a و b از X عدد حقیقی مانند

$d(a, b)$ به نام فاصله^۹ از a تا b طوری مربوط شده باشد که

$$(۱) \text{ هرگاه } a \neq b, \text{ آنگاه } d(a, b) > 0 \text{ و } d(a, a) = 0.$$

$$(۲) d(a, b) = d(b, a)$$

(۳) به ازای هر $e \in E$ داشته باشیم $d(a, b) \leq d(a, e) + d(e, b)$. هر تابع برخوردار از این سه

خاصیت را یک متر نامند.

در مجموعه اعداد حقیقی، قدرمطلق یک متر است و آن را متر اقلیدسی نامند.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم E یک فضای متری^{۱۰} باشد.

(۱) یک همسایگی^{۱۱} نقطه p به شعاع r مجموعه‌ای مانند $N_r(p)$ است که بصورت

$$N_r(p) = \{e \in E : d(p, e) < r\}$$

تعریف می‌شود.

در فضای اقلیدسی همسایگی‌ها بازه‌های باز هستند.

(۲) نقطه p یک نقطه درونی^{۱۲} \tilde{A} است، هرگاه یک همسایگی از p مانند N وجود داشته باشد که

$$N \subset \tilde{A}$$

(۳) مجموعه A باز^{۱۳} است، هرگاه هر نقطه از آن یک نقطه درونی باشد.

تعریف ۳.۳. دنباله e_n در فضای متری E را همگرا^{۱۴} به e گوئیم، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی

مانند N وجود داشته باشد که اگر $n > N$ ، آنگاه $d(e_n, e) < \epsilon$.

⁹Distance

¹⁰Metric space

¹¹Neighborhood

¹²Internal

¹³Open

¹⁴Converge

تعریف ۴.۳. نگاشت f را پیوسته گوئیم، هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y یک مجموعه باز در X باشد.

زمانی که تابع فاز پیوسته باشد، تغییر عضویت ناگهانی رخ نمی‌دهد. فازهای پیوسته دارای امنیت بیشتری هستند. برای مثال فرض کنیم مجموعه مرجع بازه $[0, 20]$ باشد. توابع فازی \tilde{A}_1 و \tilde{A}_2 که میزان دشواری صعود به قله با ارتفاع 20 را مشخص می‌کنند، بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}x, & 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & 10 \leq x \leq 20, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2(x) = \frac{1}{20}x.$$

تابع فاز \tilde{A}_1 وقتی به ارتفاع 10 می‌رسیم، تغییر ناگهانی می‌دهد و قابل پیشبینی نیست. اما با استفاده از تابع فازی \tilde{A}_2 می‌توان آینده صعود را پیشبینی کرد.

تعریف ۵.۳. دنباله‌ای از توابع مانند f_n بر A بطوریکه ^{۱۵} به تابع f همگراست، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N موجود باشد که برای هر $x \in A$ و $n > N$ ، داشته باشیم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. در این صورت می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{u} f$.

اگر $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ ، آنگاه می‌توان میزان عضویت دنباله $\{\tilde{A}_n(x)\}$ را به کمک $\tilde{A}(x)$ تقریب زد.

مثال ۶.۳. (۱) فرض کنیم مجموعه مرجع بازه $[0, 4]$ باشد. به ازای هر عدد طبیعی تابع فازی \tilde{A}_n را میزان رضایت‌مندی شهروندان از عملکرد دولت در بازه چهارساله بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_n(x) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{n}\right)x.$$

در این صورت

$$\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}(x) = \frac{1}{8}x.$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که هر چقدر به پایان دوره چهار ساله نزدیک می‌شویم، رضایت شهروندان کم شده و میزان رضایت آنها به 12.5 درصد از آغاز عملکرد نزدیک می‌شود.

¹⁵Uniformly

(۲) فرض کنیم مجموعه مرجع بازه $[0, 1000]$ باشد. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع فازی میزان بازدهی خاک یک منطقه را در پایان سال n ام بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{A}_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2n}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1000. \end{cases}$$

در این صورت

$$\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{0},$$

یعنی با گذشت زمان میزان بازدهی خاک به صفر نزدیک می‌شود.

قضیه ۷.۳. اگر $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ ، آنگاه عدد طبیعی N وجود دارد بطوری که به ازای هر $n > N$ داریم

$$\text{supp}(\tilde{A}) \subseteq \text{supp}(\tilde{A}_n).$$

برهان. فرض کنیم $e_0 \in \tilde{A}$. بنابراین $\tilde{A}(e_0) > 0$. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n(e_0) = \tilde{A}(e_0)$. پس عدد طبیعی N وجود دارد که به ازای هر $n \geq N$ داریم

$$|\tilde{A}_n(e_0) - \tilde{A}(e_0)| < \frac{1}{2} \tilde{A}(e_0).$$

در نتیجه $\tilde{A}_n(e_0) > \frac{1}{2} \tilde{A}(e_0) > 0$. پس $e_0 \in \tilde{A}_n$ برای هر $n \geq N$ برقرار است. \square

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی قبل داریم.

نتیجه ۸.۳.

(۱)

$$\text{supp}(\tilde{A}) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp}(\tilde{A}_n).$$

(۲)

$$\text{supp}(\tilde{A}) \subseteq \bigcap_{n \geq N} \text{supp}(\tilde{A}_n).$$

قضیه ۹.۳. اگر \tilde{A}_n دنباله‌ای از فازهای نرمال بر فضای فشرده E باشند که به \tilde{A} بطور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه \tilde{A} نرمال است.

برهان. باتوجه به فرض، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ عنصر e_n وجود دارد که $\tilde{A}_n(e_n) = 1$. در نتیجه $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای از فضای متری فشرده E است. پس زیردنباله‌ی^{۱۶} $\{e_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ وجود دارد که به e همگراست. همچنین $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{i_n}(e_{i_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{i_n}(e) = \tilde{A}(e).$$

¹⁶Sub-sequence

از طرفی $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{i_n}(e) = \tilde{A}(e)$ پس $\tilde{A}(e) = 1$.

□

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه ۹.۳ برقرار نیست.

مثال ۱۰.۳. توابع فاز $\tilde{A}_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ را بر بازه $[0, 1]$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\tilde{A}_n \xrightarrow{u} 1.$$

در اینجا $\tilde{A} := 1$ نرمال است اما فازهای \tilde{A}_n چنین نیستند.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $\{\tilde{A}_n\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف شده بر E باشند و $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$.

(۱) اگر \tilde{A} یک به یک^{۱۷} و محدب باشد، آنگاه از مرتبه‌ای به بعد فازهای \tilde{A}_n محدب هستند.

(۲) اگر فازهای \tilde{A}_n محدب و تعداد نامتناهی از آنها یک به یک باشند، آنگاه فاز \tilde{A} محدب است.

برهان. (۱) فرض کنیم تابع فاز \tilde{A} محدب باشد. گیریم $t \in [0, 1]$ و $e_1, e_2 \in E$ دلخواه باشند. بدون

آنکه از کلیت اثبات کاسته شود، فرض کنیم $\tilde{A}(e_1) \leq \tilde{A}(e_2)$. قرار می‌دهیم $e = te_1 + (1-t)e_2$.

پس $\tilde{A}(e) \geq \tilde{A}(e_1)$. اگر $e = e_1$ ، آنگاه اثبات تمام است. پس فرض کنیم $e \neq e_1$. در نتیجه

$\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1) > 0$. قرار می‌دهیم $\epsilon := \frac{\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1)}{2}$. با توجه به تعریف $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

به ازای هر $n \geq N$ داریم

$$|\tilde{A}(e) - \tilde{A}_n(e)| < \epsilon, |\tilde{A}(e_1) - \tilde{A}_n(e_1)| < \epsilon.$$

در نتیجه

$$\tilde{A}_n(e) > \tilde{A}(e) - \frac{\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1)}{2} = \frac{\tilde{A}(e) + \tilde{A}(e_1)}{2} > \tilde{A}(e_1) + \epsilon.$$

از طرفی $\tilde{A}(e_1) + \epsilon > \tilde{A}_n(e_1)$ پس $\tilde{A}_n(e) > \tilde{A}_n(e_1)$ و در نتیجه \tilde{A}_n محدب است.

(۲) اثبات این قسمت مشابه (۱) است.

□

قضیه ۱۲.۳ ([۷]). اگر $\{\tilde{A}_n\}$ دنباله‌ای از فازهای پیوسته بر E باشند که $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$. آنگاه، \tilde{A} پیوسته

است.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه ۱۲.۳ برقرار نیست.

مثال ۱۳.۳. فرض کنیم $\tilde{A}_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$. در این صورت به ازای هر $x \in [0, 1]$ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n(x) = 0$. در اینجا $\tilde{A}(x) = 0$ و \tilde{A}_n بطور یکنواخت پیوسته‌اند اما $\tilde{A}_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ برقرار نیست [۷].

۴. مشتق تابع فاز

مشتق^{۱۸} تابع فاز، آهنگ تغییرات عضویت عناصر مجموعه مرجع را نشان می‌دهد. زمانی که مشتق مثبت باشد، یعنی عضوهای مجموعه مرجع قطعیت بیشتری دارند. همچنین هر اندازه مقدار مشتق بزرگتر باشد، یعنی میل افراد به رضایتمندی یا قطعیت اعضا در حال افزایش است. میزان قطعیت فازهای مشتق‌پذیر تقریباً قابل تشخیص است. چنانچه تابع فازی در e_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در یک همسایگی از آن نقطه رفتار تابع فاز مشابه میزان قطعیت در نقطه e_0 است. اما چنانچه مشتق‌پذیر نباشد، آنگاه میزان قطعیت ممکن است در نقاطی بسیار نزدیک به نقطه e_0 نیز متفاوت با قطعیت در نقطه e_0 باشند.

مثال ۱۰.۴. برای نمرات خوب مجموعه مرجع را بازه $[0, 20]$ در نظر می‌گیریم. توابع فازی $\tilde{A}_1(x)$ و $\tilde{A}_2(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 10, \\ 10x - 100, & 10 < x < 10.1, \\ 1, & 10.1 \leq x \leq 20, \end{cases}$$

و

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 10, \\ \frac{1}{100}(x - 10)^2, & 10 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

باتوجه به توابع فوق از نظر خانواده‌ها نمره ۱۰ بسیار ضعیف است در صورتی که نمره ۱۰.۰۵ برای خانواده دوم همچنان ضعیف در حالی که برای خانواده اولی نمره‌ای خوب لحاظ می‌شود. این اختلاف ناشی از این است که تابع فاز $\tilde{A}_2(x)$ در ۱۰ مشتق‌پذیر است بنابراین تابع فاز هموار بوده و رفتار سیستم در نقاط نزدیک به هم، مشابه هم هستند اما تابع فاز در $\tilde{A}_1(x)$ چنین نیست. این اختلاف برای حالتی که فاز پیوسته هم نباشد، بیشتر می‌شود.

مثال ۲.۴. در یک کوره حرارتی برای کنترل سیستم حرارتی نیاز به مدل‌سازی مجموعه‌های حرارت کم، حرارت متوسط و حرارت زیاد داریم. اگر مجموعه مرجع بازه $[0, 400]$ باشد، آنگاه تابع فازی برای حرارت کم را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

¹⁸Derivative

$$\tilde{A}_l(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 240, \\ \frac{400-x}{160}, & 240 < x < 400, \\ 0, & 400 \leq x. \end{cases}$$

در اینجا برای دمای کمتر از 240 یا بیشتر از 400 مقدار مشتق برابر صفر است پس مقدار تابع فاز با حرارت کم برای این بازه دمایی ثابت است. یعنی دمای کمتر از 240 درجه حرارت پایین و دمای بیشتر از 400 حرارت زیاد محسوب می‌شود. همچنین مقدار مشتق در بازه $[240, 400]$ منفی و ثابت است. پس تابع فاز حرارت کم نزولی است. پس زمانی که دما از 240 به 400 نزدیک می‌شود، میزان حرارت بر اساس یک تابع خطی زیاد می‌شود.

مثال ۳.۴. خانواده دوم مربوط به مثال ۱.۴ از نمرات خوب را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\tilde{A}_2'(11) = \frac{1}{50} < \frac{1}{10} = \tilde{A}_2'(15).$$

پس از نظر خانواده دوم آهنگ قطعیت خوب بودن نمره 15 بسیار بیشتر از نمره 11 است. برای مثال وقتی فردی از این خانواده ابتدا نمره 15 اخذ کرده باشد، سپس نمره 16 را کسب کند، رضایت خانواده به مراتب بیشتر از زمانی است که پیشرفت فرد از نمره 11 به 13 باشد.

از آنجا که مقدار مشتق ممکن است منفی باشد، پس مشتق یک فاز ممکن است خود یک فاز نباشد. اما مشتق فازهای صعودی با شرط $\tilde{A}' \leq 1$ چنین مشکلی را ندارد و نتیجه تابع فاز هستند که ما آنها را فاز مشتق نام‌گذاری می‌کنیم.

اگر $\tilde{A}'(e) = 0$ برابر صفر باشد، آنگاه e یک نقطه بحرانی تابع فاز است. چنانچه $\tilde{A}''(e)$ منفی (مثبت) شود، آنگاه تابع فاز در e به بیشترین (کمترین) قطعیت خود می‌رسد. در حالت کلی نرمال بودن یا نبودن یک فاز به مشتق آن فاز وابسته نیست. یعنی یک فاز در عین نرمال بودن، ممکن است دارای فاز مشتق نرمال یا غیرنرمال باشد.

قضیه ۴.۴. (۱) فازهای مشتق همواره محدب هستند.

(۲) تکیه‌گاه فاز مشتق ناتهی است اگر و تنها اگر تابع فاز، ثابت نباشد.

برهان. (۱) فرض کنیم \tilde{A} یک فاز مشتق باشد. با توجه تعریف فاز، بایستی $\tilde{A}' \geq 0$. پس تابع فاز تابعی صعودی است. حال فرض کنیم $e_1 \leq e_2 \in E$ در این صورت

$$e_1 \leq te_1 + (1-t)e_2 \leq e_2.$$

پس

$$\tilde{A}(e_1) \leq \tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \leq \tilde{A}(e_2).$$

از طرفی

$$\tilde{A}(e_2) \leq \tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2).$$

در نتیجه

$$\tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \geq \tilde{A}(e_1) = \min\{\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2)\}$$

و اثبات تمام است.

(۲) فرض کنیم \tilde{A}' تابع فاز باشد و $\text{supp}\tilde{A}' \neq \emptyset$. پس عنصر $e \in E$ وجود دارد که $\tilde{A}'(e) > 0$. پس تابع فاز ثابت نیست.

بلعکس، فرض کنیم تابع فاز \tilde{A} ثابت نباشد. پس $e_1 < e_2 \in E$ وجود دارند که $\tilde{A}(e_1) \neq \tilde{A}(e_2)$. باتوجه به قضیه مقدار میانگین عدد $e \in [e_1, e_2]$ وجود دارد که

$$\tilde{A}'(e) = \frac{\tilde{A}(e_2) - \tilde{A}(e_1)}{e_2 - e_1} > 0$$

در نتیجه $\tilde{A}'(e) > 0$ پس $\text{supp}(\tilde{A}') \neq \emptyset$.

□

قضیه ۵.۴. فرض کنیم \tilde{A} تابع فاز پیوسته‌ای بر بازه‌ی $[a, b]$ باشد. در این صورت دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌های $A_n \xrightarrow{u} \tilde{A}$ وجود دارد که $A_n(X) = \int_0^1 c_n \tilde{A}(1 - (t-x)^2)^n dt$.

۵. نتیجه‌گیری

بررسی و تحلیل خواص توابع فازی به کمک ساختارهای آنالیزی امکان‌پذیر است. ساختارهای آنالیزی مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری و غیره باعث بوجود آمدن نگرش‌های جدیدی در منطق فازی می‌شوند. ارتباط بین منطق فازی و منطق کلاسیک به کمک این ساختارها امکان‌پذیر بوده و باعث می‌شود تا عدم قطعیت‌های موجود در تصمیم‌گیری‌های انسانی را توصیف نمایند. بطور کلی مسائل پیچیده فازی به کمک ساختارهای آنالیزی ساده‌تر می‌شوند. حتی اگر پارامترهای ما نامشخص یا نادقیق باشند. زیرا می‌توان رفتار یک سیستم را به کمک سیستمی دیگر که پارامترهایی شناخته شده دارند، بررسی و پیش‌بینی کرد.

مراجع

۱. ا. افضلی، م. کوچکی رفسنجانی و آ. برومند سعید، مدل تصمیم‌گیری چند هدفه فازی برای انتخاب تأمین‌کننده با رویکرد تصمیم‌گیری گروهی، همایش ملی علوم و مهندسی کامپیوتر، نجف آباد، ۱۳۹۰.
۲. ح. رضایی و م. رشید پور، نگاشت مجموعه‌های فازی نوع ۲، ۱۳۹۸.
۳. ا. رنجبر یانه سری و م. اصغری لاریمی، اجتماع زیرگروه‌های فازی و نرمال فازی، همایش منطقه‌ای پژوهش‌های نوین در ریاضی، گرگان، ۱۳۹۰.
۴. ش. سرگلزائی و ح. میش مست نهی، مروری بر مجموعه‌های فازی نوع-۲، ۱۳۹۸.

۵. ا. کیخا و ح. میش مست نهی، ارائه مدل نوین ارزیابی و رتبه بندی کارکنان، سازمانها و حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه در محیط فازی مردد، ۱۴۰۰.

6. A. Najafi, and A. Borumand Saeid, *Fuzzy Points in BE-Algebras*, 1980.

7. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1976.