Towards Mathematical Sciences

Vol. 4, No. 1, Spring and Summer 2024, pp. 44–67

DOI.10.22067/tmsj.2024.88822.1060

Expository Article

A NEW MODEL FOR GAMMA FUNCTION IN NATURAL NUMBER

ROSTAM MOHAMADIAN*

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical and Computer Sciences, Shahid Chamran University of Ahwaz, Ahwaz, IRAN
mohamadian_r@scu.ac.ir

Abstract. In this article, first, with a simple technique, we obtain a well-known formula about the gamma function and some theorems of Laplace transforms. After that, we mention a new formula, which can be used to calculate some not so convenient improper integrals, and also with the help of it and the Gaussian integral, we obtain a new convergence result regarding Hermite polynomials. Then with the help of the same formula, we obtain a new model for the gamma function in natural numbers.

2010 Mathematics Subject Classification. 00A05, 33B15.

Keywords. Power series, Laplace transform, Gamma function, Gauss integral, Hermite polynomials.

Date: Rceived 6-7-2024 Revised 17-7-2024 Accepted 19-7-2024 Available Online 30-7-2024

دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳، صص. ۴۴–۶۷
DOI. 10.22067/tmsj.2024.88822.1060
مقاله علمی-ترویجی

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی

رستم محمدیان*

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز
mohamadian_r@scu.ac.ir

چکیده. در این مقاله ابتدا با تکنیکی ساده، یک فرمول شناخته شده درباره تابع گاما و چند قضیه از تبدیلات لاپلاس را به‌دست می‌آوریم. پس از آن به فرمولی اشاره می‌کنیم که به کمک آن می‌توان برخی از انتگرال‌های ناسره نه‌چندان راحت را محاسبه کرد و هم‌چنین به کمک آن و انتگرال گوس، نتیجه همگرایی جدیدی در خصوص چندجمله‌ای‌های هرمیت به‌دست می‌آوریم. سپس به کمک همان فرمول، مدل جدیدی برای تابع گاما در اعداد طبیعی به‌دست می‌آوریم.

۱. پیش‌گفتار

در ریاضی و دیگر شاخه‌های علوم از جمله فیزیک و مهندسی اهمیت تابع گاما، بتا، تبدیلات لاپلاس و مبحث همگرایی یا واگرایی سری‌ها و انتگرال‌های ناسره بر هیچ‌کس پوشیده نیست. در این مقاله ما با کمک سری‌های مکلورن و فرمولی دیده نشده، مطالبی را در خصوص این مفاهیم بیان می‌کنیم. مقاله به این‌صورت بخش‌بندی شده است که در بخش دوم که اندکی مقدماتی است با کمک تبدیل لاپلاس و سری هندسی، سری‌های مکلورن معروف را به‌دست آورده و با کمک سری دوجمله‌ای فرمولی مربوط به تابع گاما را ثابت می‌کنیم. در بخش سوم، قضایای مهم تبدیلات لاپلاس را فقط به کمک سریها ثابت می‌کنیم. در بخش چهارم، با بهره‌گیری

2010 Mathematics Subject Classification. 00A05, 33B15.

واژگان کلیدی. سری توانی، تبدیل لاپلاس، تابع گاما، انتگرال گوس، چندجمله‌ای‌های هرمیت..
تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۴/۱۶ بازنگری ۱۴۰۳/۴/۲۷ پذیرش ۱۴۰۳/۴/۲۹ انتشار برخط ۱۴۰۳/۵/۹

نحوه ارجاع به این مقاله: ر. محمدیان، مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی ، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۴۲–۶۵.

از فرمولی، مقدار عددی برخی از انتگرال‌های ناسره نه‌چندان آسان را می‌یابیم. از آن جمله تعمیمی از تابع بتا و نتیجه همگرایی مهمی در خصوص چندجمله‌ای‌های هرمیت البته به کمک انتگرال گوس به‌دست می‌آوریم. پس از آن نمایش جدیدی برای تابع گاما به ازای اعداد طبیعی به‌دست می‌آوریم. در نهایت اندکی به بحث درباره یک سری عددی خاص می‌پردازیم. از آنجا که مطالب حالت عمومی دارند می‌توانید برای دیدن جزئیات به تمام مراجع نگاه کنید.

۲. سری‌های هندسی و دوجمله‌ای و لاپلاس

در این بخش با کمک سری هندسی و تبدیلات لاپلاس، سری‌های مکلورن معروف را به‌دست می‌آوریم. فرض بر آن است که تمام شرایط مورد نیاز برقرار هستند بدون آن‌که به آنها اشاره کنیم. از آن جمله فرض بر آن است که توابع مورد بحث با بسط مکلورن خود در بازه معلوم برابر بوده و هر جا سخن از تبدیل لاپلاس به میان می‌آید تابع به‌طور تکه‌تکه پیوسته و از مرتبه نمایی است. هم‌چنین لاپلاس و لاپلاس معکوس یک سری، برابر با لاپلاس یا لاپلاس معکوس تک‌تک جملات آن است.

مثال ۱.۲. *با فرض $0 < x < 1$ سری $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x = \frac{1}{p}$ که $p > 1$ دراین‌صورت*

$$\frac{1}{p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n+1}}$$

بنابراین

$$L^{-1}(\frac{1}{p-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}(\frac{1}{p^{n+1}}).$$

در نتیجه

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

مثال ۲.۲. *سری $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x = \frac{1}{p}$ و $p > 0$. دراین‌صورت*

$$\frac{p^2}{p^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n}}.$$

در نتیجه

$$\frac{1}{p^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

بنابراین

$$L^{-1}(\frac{1}{p^2+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^{-1}(\frac{1}{p^{2n+2}}).$$

در نتیجه

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

به‌طور کاملا مشابه می‌توان سری‌های مکلورن توابع $\cos(x)$ و $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$ را به‌دست آورد.

مثال ۳.۲. *اگر $L(f(x))=\frac{p}{p^2+4}$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.*

حل: فرض کنیم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

بنابراین

$$L(f(x))=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\frac{(2n)!}{p^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}\frac{(2n+1)!}{p^{2n+2}}. \tag{۱.۲}$$

از طرف دیگر با داشتن سری هندسی و با شرط $p>2$ داریم

$$L(f(x))=\frac{1}{p(1+\frac{4}{p^2})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{p^{2n+1}}. \tag{۲.۲}$$

از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌شود $(2n)!\cdot a_{2n}=(-1)^n4^n$ و $a_{2n+1}=0$. که از آنجا خواهیم داشت $a_{2n}=\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=\cos(2x).$$

در ادامه با همان تکنیک گفته شده و با کمک سری دوجمله‌ای یک فرمول معروف مربوط به تابع گاما را به‌دست می‌آوریم. با فرض $0<x<1$ سری دوجمله‌ای

$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$$

را در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $m=\frac{-1}{2}$. دراین‌صورت

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{-1}{2}}{n}x^n.$$

قرار می‌دهیم $x = \frac{1}{p^2}$. دراین‌صورت

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{1}{p^{2n}}$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{1}{p^{2n+1}}.$$

حال

$$L^{-1}(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} L^{-1}(\frac{1}{p^{2n+1}})$$

پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

درنتیجه

$$\binom{\frac{-1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

و در نهایت داریم

$$\Gamma(\frac{1}{2}-n) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} \Gamma(\frac{1}{2}).$$

۳. برخی از قضایای لاپلاس

در این بخش با همان تکنیک، قضایای شناخته شده مربوط به تبدیل لاپلاس از آن جمله قضیه کنولوسیون و فرمولی مربوط به تابع بتا را با کمک سری‌های مکلورن به‌دست می‌آوریم. فرض بر آن است که تابع $f(x)$ دارای سری مکلورن و همچنین تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ موجود است. به‌علاوه داریم $L(f(x)) = F(p)$ و همچنین شرایط جابجایی لاپلاس و سیگما فراهم است.

قضیه ۱.۳ (مشتق تبدیل لاپلاس). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$*، آن‌گاه* $L(xf(x)) = -F'(p)$.

برهان. فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{n!}{p^{n+1}} = F(p).$$

از طرف دیگر واضح است که:

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n+1},$$

و

$$F'(p) = -\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{n+1}{p^{n+2}}.$$

دوباره با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(xf(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{(n+1)!}{p^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{n+1}{p^{n+2}} = -F'(p),$$

که همان نتیجه مطلوب است.

□

قضیه ۲.۳ (تبدیل لاپلاس مشتق). *اگر داشته باشیم* $L(f(x)) = F(p)$*، آن‌گاه*

$$.L(f'(x)) = pF(p) - f(0).$$

برهان. واضح است که $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$ با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(f'(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^n} = p\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}.$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$L(f'(x)) = p(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} - \frac{f(0)}{p}) = pF(p) - f(0),$$

که همان نتیجه مطلوب است. □

به‌طور مشابه با روال فوق می‌توان تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه $n-$ ام تابع، یعنی $f^{(n)}(x)$ را به‌دست آورد.
به‌عنوان نمونه می‌توان نشان داد

$$L(f''(x)) = p^2L(f(x)) - pf(0) - f'(0).$$

قضیه ۳.۳ (تبدیل لاپلاس انتگرال). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$*، آن‌گاه* $.L(\int_0^x f(x)dx) = \frac{F(p)}{p}$

برهان. واضح است که

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(\int_0^x f(x)dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+2}} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = \frac{F(p)}{p},$$

که همان نتیجه مطلوب است.

$\square$

قضیه ۴.۳ (انتگرال تبدیل لاپلاس). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$ *آن‌گاه با فرض* $f(0) = 0$ *داریم*

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = L(\frac{f(x)}{x}).$$

برهان. واضح است که $L(\frac{f(x)}{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$. از طرف دیگر داریم $F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}$ بنابراین

$$\int_p^b F(p)dp = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{nb^n}$$

در نتیجه

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \lim_{b\to\infty} \int_p^b F(p)dp = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} = L(\frac{f(x)}{x})$$

و کار تمام است. $\square$

قضیه ۵.۳ (انتقال). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$*، آن‌گاه* $L(e^{ax}f(x)) = F(p-a)$.

برهان.

$$L(e^{ax}f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} L(e^{ax}x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} = F(p-a).$$

$\square$

به عبارت دیگر برای دانستن $L(e^{ax}f(x))$ کافی است $L(e^{ax}x^n)$ را داشته باشیم.

قضیه ۶.۳ (کنولوسیون). *فرض کنیم* $f(x)$ *و* $g(x)$ *دو تابع با شرایط لازم باشند. دراین‌صورت*

$$L(f*g) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0).$$

برهان. آشکار است که

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = F(p),$$

$$L(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = G(p).$$

بنابراین

$$L(f * g) = F(p)G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0).$$

□

به کمک فرمول فوق می‌توان مجموع برخی از سری‌های پیچیده را به‌دست آورد. برای راستی آزمایی، یک نمونه ساده در زیر ارائه می‌کنیم.

مثال ۷.۳. *فرض کنیم $f(x) = x$ و $g(x) = \sin(x)$ در این صورت بنا بر فرمول کنولوسیون می‌دانیم*

$$L(f * g) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

اکنون با انجام محاسبات می توان دید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = \frac{1}{p^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n}} = \frac{1}{p^4} \frac{p^2}{p^2+1} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

در ادامه تعمیمی ساده از تابع بتا را به‌دست می‌آوریم. تابع زیر را در نظر می‌گیریم.

$$B_a(m,n) = \int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1} dx$$

با تغییر متغیر $x = at$ به‌راحتی می‌توان دید که

$$B_a(m,n) = B(m,n) a^{m+n-1} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} a^{m+n-1}$$

که در آن $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ تابع معروف بتاست. اکنون به کمک فرمول‌های این بخش این گزاره را نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۳ (تعمیم تابع بتا). *اگر از طرفین قضیه کنولوسیون لاپلاس معکوس بگیریم خواهیم داشت*

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)!} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) x^{n+1}. \tag{۱.۳}$$

از طرف دیگر داریم

$$f*g=\int_0^x f(t)g(x-t)dt=\int_0^x \big[\big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n\big)\big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-t)^n\big)\big]dt$$
$$=\int_0^x \big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k\frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}(x-t)^{n-k}\big)dt$$
$$=\big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\int_0^x t^k(x-t)^{n-k}dt\big). \tag{۲.۳}$$

اکنون از روابط (۱.۳) و (۲.۳) *نتیجه می‌شود*

$$\int_0^x t^k(x-t)^{n-k}dt=\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

با تغییر حروف می‌توان نوشت

$$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}dx=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}a^{m+n-1}.$$

۴. یافتن مقدار برخی از انتگرال‌ها به کمک فرمولی مهم

در این بخش با ساختن فرمولی به کمک سری‌های مکلورن و تبدیلات لاپلاس، دو هدف را دنبال می‌کنیم. یکی نشان دادن همگرایی و یافتن مقدار عددی برخی از انتگرال‌های مجازی به کمک سریهاست و دیگری نشان دادن همگرایی برخی از سری‌ها البته بدون دانستن جمله عمومی آن به‌طور شفاف به کمک انتگرال‌های مجازی. در شاخه‌هایی از ریاضی از جمله در آنالیز گاه می‌بینیم که انتگرال‌های مجازی نوع اول و سری‌های عددی نامتناهی هم‌رفتارند که از آن جمله می‌توان به آزمون انتگرال برای همگرایی سری‌ها اشاره کرد. فرمول اصلی این بخش که هم اینک آن را ارائه می‌کنیم نشان می‌دهد که علاوه بر هم‌رفتاری مقدار آن دو نیز با هم برابر است و این موضوع اهمیت بالایی در محاسبات دارد. برای نمونه از این دست، مرجع [۷، قضیه ۵.۸.۳] را بنگرید. قضیه زیر که ابزار مفیدی در محاسبه انتگرال‌های ناسره برحسب سریهایست در واقع حالت کلی قضیه انتگرال تبدیل لاپلاس است که در بخش قبل به آن پرداختیم.

قضیه ۱.۴. *فرض کنیم بسط مکلورن تابع $f(x)$ روی بازه I موجود باشد. دراین‌صورت با فرض آن‌که $x\in I-\{0\}$ داریم*

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}e^{-px}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$$

برهان. طبق فرض داریم $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n-1} = \frac{f(0)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n-1}.$$

اکنون با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین، با شرط وجود تبدیل لاپلاس و شرط وجود $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ داریم

$$L\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{(n-1)!}{p^n}.$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$L\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

با توجه به تعریف لاپلاس خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(0)}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}. \qquad \text{(فرمول اصلی)}$$

□

در ادامه به کمک این فرمول، چند انتگرال و سری را حساب می‌کنیم. اما پیش از آن به آزمون نسبت برای همگرایی این سری اشاره می‌کنیم که در این‌جا ارتباطی سه‌گانه میان حد و مشتق و انتگرال را بیان می کند.

نکته ۲.۴ (آزمون نسبت). *فرض کنیم برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $f^{(n)}(0) \neq 0$ دراین‌صورت برای p های مناسب می‌توان گفت که:*

(الف) انتگرال همگراست اگر $p > |\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}|\lim_{n\to\infty}$.

(ب) انتگرال واگراست اگر $p < |\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}|\lim_{n\to\infty}$.

(پ) آزمون بی‌نتیجه است اگر $p = |\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}|\lim_{n\to\infty}$.

نکته ۳.۴. *فرمول اصلی را می‌توان در حالت دیگر و برای محاسبه انتگرال‌های دیگری به شرح زیر به‌دست آورد.*

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2} e^{-px} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)p^{n-1}}.$$

به‌طور کلی می‌توان نوشت:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)-\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^{m+1}} e^{-px} dx = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)\cdots(n-m)p^{n-m}}.$$

خاطر نشان کنیم که می‌توان در قضیه ۱.۴ ، بسط تیلر تابع را حول نقطه دلخواه c در نظر گرفت و صورت دیگری از این فرمول‌ها را به‌دست آورد.

به‌عنوان نمونه‌ای ازنکته ۳.۴، انتگرال زیر را حساب می‌کنیم.

مثال ۴.۴. *فرض کنیم* $f(x)=1-\cos(x)$ *در این‌صورت اگر از سری مکلورن* $\tan^{-1}(x)$ *انتگرال بگیریم خواهیم داشت*

$$x\tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}.$$

با فرض $x=\frac{1}{p}$ *داریم*

$$\frac{1}{p}\tan^{-1}(\frac{1}{p})-\frac{1}{2}\ln((\frac{1}{p})^2+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{p^{2n+2}}.$$

بنابراین به راحتی دیده می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{p^{2n+2}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)p^{n-1}}.$$

پس طبق فرمول فوق داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}e^{-px}dx=\tan^{-1}(\frac{1}{p})-\frac{1}{2}p\ln((\frac{1}{p})^2+1).$$

اکنون اگر وقتی‌که $p\to 0$ *از طرفین حد بگیریم خواهیم داشت*

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

که نتیجه‌ای شناخته شده است.

اکنون به کمک فرمول اصلی، همگرایی چندین انتگرال را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۴. *فرض کنیم* $f(x)=\sin(x)$. *دراین‌صورت داریم* $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$. *به‌عبارت دیگر*

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0\ , & n=2k,\\ (-1)^k\ , & n=2k+1.\end{cases}$$

بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}e^{-px}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}}=\tan^{-1}(\frac{1}{p}).$$

اگر قرار دهیم $p=1$*، آن‌گاه*

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}e^{-x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}=\frac{\pi}{4}.$$

هم‌چنین نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{p\to 0^+}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-px} = \lim_{p\to 0^+}\tan^{-1}(\frac{1}{p}) = \frac{\pi}{2}.$$

مثال ۶.۴. *فرض کنیم* $f(x) = \frac{x^{m+1}}{m!}$. *دراین‌صورت داریم*

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\ , & n \neq m+1, \\ m+1\ , & n = m+1. \end{cases}$$

بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$L(x^m) = \int_0^\infty x^m e^{-px}dx = \frac{m!}{p^{m+1}}.$$

اگر قرار دهید $p = 1$*، آنگاه*

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}dx = m! = \Gamma(m+1).$$

مثال ۷.۴. *فرض کنیم*$.f(x) = \cos(x)$. *دراین‌صورت* $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ *، پس طبق فرمول اصلی داریم*

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x}e^{-px}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}}.$$

از طرفی طبق سری هندسی داریم

$$
\begin{aligned}
&\frac{p}{p^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}} \\
\Rightarrow\ &\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}} \\
\Rightarrow\ &\int_1^p \frac{s}{s^2+1} ds = \int_1^p \frac{1}{s} ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^p \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}} dp \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2}\ln(\frac{p^2+1}{2}) = \ln(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} \\
\Rightarrow\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} = \ln(p) - \ln(\sqrt{\frac{p^2+1}{2}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \\
\Rightarrow\ &\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)-1}{x} e^{-px} dx = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \\
&\qquad = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \\
&\qquad = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) - \frac{1}{2}\ln 2 = \ln(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}).
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)-1}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} = \ln(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}).$$

با فرض $p=1$ داریم

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)-1}{x} e^{-x} dx = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

مثال ۸.۴. *فرض کنیم $f(x) = e^{-(a-1)x} - e^{-(b-1)x}$ و $a, b > 0$ در این‌صورت به‌آسانی می‌توان دید که*

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}((b-1)-(a-1)).$$

پس طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(a-1)x} - e^{-(b-1)x}}{x} e^{-px} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

با فرض $p=1$ داریم

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}((b-1)-(a-1))$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(b-1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(a-1)$$
$$= \ln(b) - \ln(a) = \ln(\frac{b}{a}).$$

مثال ۹.۴. فرض کنیم $f(x)=\cos(ax)-\cos(bx)$. دراین‌صورت $f^{(2k)}(0)=(-1)^k(a^{2k}-b^{2k})$ و $f^{(2k+1)}(0)=0$. برای $p>0$ طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}e^{-px}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(a^{2n}-b^{2n})}{2np^{2n}}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}(\frac{a}{p})^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}(\frac{b}{p})^{2n}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\big(|\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}|\big).$$

با حدگیری از طرفین وقتی‌که $p\to 0$ داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx = \ln(\frac{b}{a}).$$

نکته ۱۰.۴. اگر تابع g از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(x)=xg(x)$، آن‌گاه با توجه به قضیه لایبنیتز داریم

$$f^{(n)}(x) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$$
$$\to f^{(n)}(0) = ng^{(n-1)}(0)$$
$$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n-1)}(0)}{p^n}$$
$$\to \int_0^\infty g(x)e^{-px}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n-1)}(0)}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}}.$$

مثال ۱۱.۴. فرض کنیم $g(x)=e^{-ax}$. دراین‌صورت طرف چپ فرمول فوق برابر است با $\int_0^\infty e^{-ax}e^{-px}dx = \frac{1}{p+a}$. برای طرف دوم با توجه به این‌که $g^{(n)}(0)=(-1)^n a^n$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{a}{p})^n=\frac{1}{p}\frac{1}{1+\frac{a}{p}}=\frac{1}{p+a}$$

که درستی آن را نشان می دهد.

نکته ۱۲.۴. *اگر تابع g از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(x)=xg(x)e^x$، آن‌گاه می‌توان نشان داد*

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}g^{(k-1)}(x).$$

بنابراین طبق فرمول اصلی می‌توان نوشت

$$\int_0^{\infty}g(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(0).$$

مثال ۱۳.۴. *فرض کنیم $g(x)=e^{-ax}$ که در آن داشته باشیم $0<a\leq 1$. دراین‌صورت طرف چپ فرمول فوق برابر است با $\int_0^{\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$. برای طرف دوم با توجه به این‌که $g^{(n)}(0)=(-1)^n a^n$ داریم*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k a^k=\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n=\frac{1}{a}$$

که درستی آن را نشان می‌دهد.

نکته ۱۴.۴. *برای محاسبه انتگرال*

$$I=\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}e^{-px}dx$$

کافی است قرار دهیم $g(x)=f(ax)-f(bx)$. آن‌گاه مطابق فرمول اصلی داریم $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{np^n}$، اما آشکار است که $g^{(n)}(0)=(a^n-b^n)f^{(n)}(0)$. بنابراین $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n}(a^n-b^n)$. به‌عنوان نمونه و با شرط $p>a,b$

(الف) اگر $f^{(n)}(0)=n$، آن‌گاه $I=\frac{p(a-b)}{(p-a)(p-b)}$.

(ب) اگر $f^{(n)}(0)=1$، آن‌گاه $I=\ln(\frac{p-b}{p-a})$.

(پ) اگر $f^{(n)}(0)=(-1)^n$، آن‌گاه $I=\ln(\frac{p+b}{p+a})$.

نکته ۱۵.۴. *فرض کنیم $f(0) = 0$. دراین‌صورت به کمک فرمول اصلی و ضرب دو سری می‌توان تساوی زیر را نشان داد*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)f(y)}{xy} e^{-p(x+y)} dxdy = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)f^{(n-k)}(0)}{p^{n+1}(k+1)(n-k)}.$$

برای ارائه نمونه دیگر ابتدا نکته زیر مورد نیاز است.

نکته ۱۶.۴. *تساوی زیر برقرار است.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} a_{2k} + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} a_{2k+1}.$$

مثال ۱۷.۴. *انتگرال زیر را حساب می‌کنیم.*

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2xy} e^{-p(x+y)} dxdy.$$

در واقع انتگرال فوق چنین است

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(x)\sin(y)}{xy} e^{-p(x+y)} dxdy.$$

که آشکار است که مقدار آن به ازای $p = 1$ برابر با $\frac{\pi^2}{16}$ است. ما در این‌جا آن را به کمک فرمول فوق حساب می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم $f(x) = \sin(x)$ و از نکته ۱۴.۴ استفاده می‌کنیم. چون $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ و $f^{(2k)}(0) = 0$ با توجه به نکته ۱۵.۴ داریم

$$I = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{p^{n+1}} (\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{f^{(2k+1)}(0)f^{(n-2k)}(0)}{(2k+1)(n-2k)} + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} \frac{f^{(2k+2)}(0)f^{(n-2k-1)}(0)}{(2k+2)(n-2k-1)}).$$

اگر قرار دهیم $n = 2m+1, p = 1$، پس از انجام محاسبات لازم داریم

$$I = \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{(-1)^{m-k}}{2(m-k)+1}$$

$$= (\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{2m+1})(\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{2m+1}) = \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}.$$

برای $p > 1$ دلخواه خواهیم داشت $I = \left(\tan^{-1}(\frac{1}{p})\right)^2$..

مثال ۱۸.۴ (انتگرال گوس). در اینجا انتگرال گوس را بر حسب سری بیان کرده و به کمک آن نتیجه همگرایی برای چندجمله‌ای‌های هرمیت به‌دست می‌آوریم. برای این منظور تابع $f(x) = xe^{ax}e^{-x^2}$ را که در آن $a > 1$ فرض شده است در نظر می‌گیریم. یادآوری کنیم که

$$H_n(x) = n!\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند. تابع مولد چندجمله‌ای‌های هرمیت به شرح زیر است.

$$e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n$$

اگر قرار دهیم $2t = a$، آن‌گاه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{a}{2})}{n!}x^{n+1}.$$

در نتیجه به‌راحتی می‌توان دید که $f^{(n)}(0) = nH_{n-1}(\frac{a}{2})$. بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2+(a-p)x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{a}{2})}{p^{n+1}}$$

که در آن $p \geq a$. ، اما می‌توان دید که

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2+(a-p)x}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{(p-a)^2}{4}}\left(1 - erf(\frac{p-a}{2})\right)$$

که در آن

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

تابع خطا است. در نتیجه داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{a}{2})}{p^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{(p-a)^2}{4}}\left(1 - erf(\frac{p-a}{2})\right).$$

اگر قرار دهیم $p = a$، آن‌گاه به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{p}{2})}{p^n} = \frac{p}{2}\sqrt{\pi}$$

و اگر فرض کنیم $p = 2$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(1)}{2^n} = \sqrt{\pi}$$

که نتیجه‌ی جالب و جدیدی درباره چندجمله‌ای‌های هرمیت است.

با توجه به صورت‌های گوناگون برای $H_n(1)$ می‌توان به نتایجی اشاره کرد. به‌عنوان نمونه با توجه به فرمول

$$H_n(1) = \frac{2^{n+1}e}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} x^n \cos(\frac{n\pi}{2} - 2x)dx$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-x^2} x^n \cos(\frac{n\pi}{2} - 2x)dx = \frac{\pi}{2e}$$

یا با توجه به فرمول

$$H_n(1) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} (1+ix)^n dx$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} (1+ix)^n dx = \pi.$$

با محاسبه هر دو انتگرال بالا به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\sqrt{\pi} = 1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{23}{8} + \frac{29}{8} - \frac{103}{16} - \frac{335}{16} + \frac{257}{32} + \frac{3607}{32} \cdots .$$

در حالت کلی اگر تابع $f_m(x) = xe^{2x-x^2}(H_m(x))^2$ را در نظر بگیریم و در فرمول اصلی $p = 2$ قرار دهیم، آن‌گاه با توجه به رابطه

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} (H_m(x))^2 dx = 2^m m! \sqrt{\pi}$$

نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_m^{(n)}(0)}{n2^n} = 2^m m! \sqrt{\pi}.$$

با فرض $m = 0$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(1)}{2^n} = \sqrt{\pi}$$

که همان نتیجه بالاست چراکه $H_0(x) = 1$ و با فرض $m = 1$ و پس از انجام محاسبات نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)H_n(1)}{2^n} = 2\sqrt{\pi}.$$

۵. نمایش دیگری از تابع گاما

تابع گاما که اولین بار توسط اویلر در سال ۱۹۲۹ معرفی شد در تمام شاخه‌های علوم از جمله فیزیک و مهندسی کاربرد فراوان دارد. این تابع نمایش‌های مختلفی دارد که در ادامه آنها را نشان می‌دهیم. در این بخش ما به کمک فرمول اصلی این نوشته، نمایش جدیدی برای آن البته برای مقادیر طبیعی به‌دست می‌آوریم. برای اطلاعات دقیق‌تر درباره تابع گاما مراجع [۲، ۶] را بنگرید.

(۱) نمایش اویلر:

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(۲) نمایش اویلر:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}n^x.$$

(۳) نمایش برنولی:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(۴) نمایش وایراشتراس:

$$\Gamma(x)=\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}},$$

که در آن

$$\begin{aligned}\gamma&=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n))=-\int_0^{\infty}e^{-x}\ln(x)dx\\&=2\int_0^{\infty}\frac{\cos(x^2)-\cos(x)}{x}dx\end{aligned}$$

ثابت اویلر–ماسکرونی نام دارد با مقدار تقریبی 0.577 برابر است.

نمایش جدید : اکنون به نمایش خودمان می‌پردازیم. فرض کنیم $f(x)=x^m e^{(p-1)x}$ که در آن m یک عدد طبیعی و $p>1$ یک عدد حقیقی است. دراین‌صورت می‌توان نشان داد که

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)\dots(n-m+1)(p-1)^{n-m}$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(p-1)^{n-m}}{np^n}$$
$$=\frac{1}{p^m}\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)\dots(n-m+1)(\frac{p-1}{p})^{n-m} \qquad (۱.۵)$$

از طرف دیگر با $(m-1)$ بار مشتق گرفتن از طرفین سری هندسی خواهیم داشت

$$\frac{(m-1)!}{(1-x)}=\sum_{n=m-1}^{\infty}n(n-1)\dots(n-m+2)x^{n-m+1}=\sum_{n=m}^{\infty}(n-1)\dots(n-m+1)x^{n-m}$$

اگر در سری فوق قرار دهیم $x=\frac{p-1}{p}$ آنگاه نتیجه می‌شود

$$(m-1)!p^m=\sum_{n=m}^{\infty}(n-1)\dots(n-m+1)(\frac{p-1}{p})^{n-m} \qquad (۲.۵)$$

اکنون از رابطه‌های (۱.۵) و (۲.۵) آشکار می‌شود که

$$\Gamma(m)=(m-1)!=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

در نتیجه داریم

$$\Gamma(m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^m e^{(p-1)x}\right)\right]|_{(x=0)}.$$

۶. نکته ایی درباره سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

واضح است که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ همگراست اما تاکنون مجموع آن نامعلوم است. بنابراین این سری و مقدار مجموع آن مورد توجه ریاضیدانان است. در این بخش، ما طبق فرمولی که به‌دست آورده‌ایم اندکی درباره این سری صحبت می‌کنیم و آن را به‌صورت دیگری نشان می‌دهیم. اتحادی که در گزاره بعد نشان داده می‌شود ابتدا در سال ۱۶۹۷ توسط یوهان برنولی ریاضیدان سوئیسی ارائه شده است و به رویای دانشجوی سال دوم معروف است در مقایسه با اتحاد $(x+y)^n=x^n+y^n$ که به رویای دانشجوی سال اول یا تازه‌وارد معروف است و می‌دانیم که در حالت کلی برقرار نیست. برای اطلاعات بیشتر به [۷، ۴] مراجعه شود.

گزاره ۱.۶. *ثابت کنید*

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

برهان. برای اثبات ابتدا تغییر متغیر $x = e^{-t}$ را به‌کار می‌بریم. در مرحله دوم از سری مکلورن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. در مرحله سوم از قضیه ۵.۱.۳ همان مرجع کمک می‌گیریم که جابجایی انتگرال و سیگما را تضمین می‌کند. در مرحله چهارم اندیس n را یک واحد منتقل می‌کنیم. در مرحله پنجم تغییر متغیر $nt = s$ را به‌کار می‌بریم. در مرحله آخر از این خاصیت تابع گاما کمک می‌گیریم که بیان می‌کند $\Gamma(n) = (n-1)!$.

بنابر فرآیند گفته شده می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx &= \int_0^\infty (e^{-t})^{-e^{-t}}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{te^{-t}}e^{-t}dt\\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}t^n e^{-nt}\right]e^{-t}dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-(n+1)t}dt\\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-nt}dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!}n^{-n}\int_0^\infty s^{n-1}e^{-s}ds\\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!}n^{-n}\Gamma(n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}.\end{aligned}$$

□

هم‌چنین می‌توان نشان داد

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^x}dx = \int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x^x}dx.$$

اکنون تابع $f(x) = xe^{xe^{-x}}e^x$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $g(x) = xe^{xe^{-x}}$ و $h(x) = e^x$.

طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty e^{xe^{-x}}e^x e^{-px}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$$

اما $h^{(n)}(0) = 1$ و با اندکی محاسبات نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}k(1-k)^{n-k}$$

که در آن $n \geq 2$. اکنون بنابر قاعده لایبنیتز خواهیم داشت

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}g^{(k)}(0).$$

در نتیجه داریم

$$f^{(n)}(0)=n+\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}.$$

با فرض $p=2$ و با توجه به گزاره ۱.۶ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\int_0^{\infty}e^{xe^{-x}}e^{-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}f^{(n)}(0)$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^n}f^{(n)}(0)=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\Big[n+\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}\Big]$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\frac{1}{n2^n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}$$

در نهایت داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\frac{1}{n2^n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\frac{1}{2^n}\binom{n-1}{n-k,k-r,r-1}(1-r)^{k-r}$$

که بیان دیگری از این سری معروف است که شاید به یافتن مقدار مجموع آن کمک کند.

نکته ۲.۶. *در انتها انتگرال معروف دیگری را به‌دست می‌آوریم.*

$$\frac{1}{x^x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln^n x}{n!}$$

در نتیجه

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1x^n\ln^n xdx$$

با توجه به گزاره ۱.۶ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1x^n\ln^n xdx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

اکنون اگر قرار دهیم

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}},$$

آن‌گاه خواهیم داشت

$$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

که نتیجه درستی است چراکه حالت خاصی از فرمول زیر است

$$\int_0^1 x^m \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

سپاس‌گزاری

نویسنده وظیفه اخلاقی خود می‌داند تا از داور محترم این مقاله، به‌خاطر نظرات وسازنده‌اشان که در غنی‌تر شدن محتوای مقاله نقشی شایسته داشت، تشکر و قدردانی نماید. همچنین بدینوسیله از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه $(GN : SCU.MM403 \cdot 648)$ در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌گردد.

مراجع

1. A. Apelblat, *Application of Laplace transformation to evaluation of integrals*, J. Math. Anal. Appl. **186** (1994), 237–253.
2. E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
3. H. Bateman, A. Erdélyi, W. Magnus, and F. Oberhettinger, *Tables of integral transforms*, Vol. 1, McGraw Hill, New York, 1954.
4. J.M. Borwein, D.H. Bailey and R. Girgensohn, *Experimentation in mathematics: Computational paths to discovery*, AK Peters Ltd, 2004.
5. W.E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10 edition, Wiley, 2012.
6. O.J. Farrell and B. Ross, *Solved problems in analysis*, Dover Publications Inc. New York, 1971.
7. O. Hijab, *Introduction to calculus and classical analysis*, Springer, 2007.
8. E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Wiley, 1998.
9. W. A. Pribitkin, *Laplace's integral, the Gamma function, and beyond*, Amer. Math. Monthly, **109** (2002), no. 3, 235–245.
10. J. L. Schiff, *The Laplace transform: Theory and applications*, Springer Science and Business Media, 1999.

11. G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, 2nd Edition ,McGraw-Hill, 1991.

12. D. Verma, *Relation between Beta and Gamma function By using Laplace transformation*, Researcher, **10**(2018) no. 7, 72–74.