



## PRINCIPLES AND STANDARDS OF HIGH SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION WITH EMPHASIS ON PROCEDURAL STANDARDS

NOUROOZ HASHEMI\*

Department of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran  
h.nourooz@cfu.ac.ir

**Abstract.** Principles of mathematics education and content standards and (NCTM) abstract. The National Council of Mathematics Teachers of America and Canada has compiled a process for school mathematics that most countries, including Iran, have included in the planning of school mathematics courses. In Iran, the use of these standards in both content and process forms is clearly seen in the educational program of school mathematics courses in the field of preparing teaching resources and explaining the teaching methods of mathematics courses. Due to the importance of procedural standards and the fact that in the research of school mathematics education, especially in secondary school, they have been less discussed in comparison with content standards, this study is for the first time in a coherent way with the method of library research and collecting information from First-hand and important sources and documents and by categorizing and analyzing this information by the method of document analysis, it has defined and introduced the principles and standards of high school mathematics education, such as content and process, and considering the importance of process standards of this type The standard has been emphasized and explained. Also, the relationship of various process standards with each other and their importance in school mathematics education has been investigated and analyzed, and the new modeling process standard has been introduced and described. In addition, how to use them is provided for the use of professionals, teachers, students and students.

2020 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60.

Keywords. Principles of mathematics education, standards, process, secondary mathematics, mathematics education.

Date: Received 16-6-2024 Revised 18-8-2024 Accepted 2-9-2024 Available Online 26-9-2024  
©Ferdowsi University of Mashhad.



## اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی

نوروز هاشمی\*

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

[h.nourooz@cfu.ac.ir](mailto:h.nourooz@cfu.ac.ir)

چکیده. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) اصول آموزش ریاضی و استانداردهای محتوایی و فرآیندی برای ریاضیات مدرسه‌ای تدوین کرده است که اکثر کشورها از جمله کشور ایران آن را در برنامه‌ریزی دروس ریاضی آموزشی گنجانده‌اند. در ایران، در برنامه آموزشی دروس ریاضی مدرسه‌ای در ساحت تهیه منابع درسی و تبیین روش‌های تدریس دروس ریاضی استفاده از این استانداردها در دو قالب محتوایی و فرآیندی به روشنی دیده می‌شود. با توجه به اهمیت استانداردهای فرآیندی و اینکه در تحقیقات آموزش ریاضی مدرسه‌ای و به ویژه دوره‌ی متوسطه کمتر به آن‌ها در مقایسه با استانداردهای محتوایی پرداخته شده است، این مطالعه برای اولین بار به صورت منسجم با روش تحقیق کتابخانه‌ای و جمع‌آوری اطلاعات از منابع و اسناد دست اول و مهم و با دسته‌بندی، تجزیه و تحلیل این اطلاعات به روش تحلیل اسنادی، به تعریف و معرفی اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه از قبیل محتوایی و فرآیندی پرداخته است و با توجه به اهمیت استانداردهای فرآیندی، این نوع استاندارد را مورد تأکید و توضیح قرار داده است. همچنین ارتباط انواع استانداردهای فرآیندی با همدیگر و اهمیت آن‌ها در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است و استاندارد جدید فرآیندی مدل‌سازی معرفی و شرح داده شده است. به علاوه، چگونگی کاربرد آن‌ها برای استفاده‌ی متخصصان، معلمان، دانشجویان و دانش‌آموزان ارائه شده است.

2010 Mathematics Subject Classification. 97C30, 97C70, 97D60.

واژگان کلیدی. اصول آموزش ریاضی، استانداردها، فرآیندی، ریاضیات متوسطه، آموزش ریاضی..

تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۳/۲۷ بازنگری ۱۴۰۳/۵/۲۸ پذیرش ۱۴۰۳/۶/۱۲ انتشار برخط ۱۴۰۳/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: ن. هاشمی، اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی

، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۶۶-۸۳.

© دانشگاه فردوسی مشهد.

## ۱. پیش‌گفتار

ریاضیات در زندگی روزمره مهم است و به انسان امکان می‌دهد دنیای اطراف خود را به خوبی درک کند و زندگی خود را مدیریت کند. استفاده از ریاضیات بشر را قادر می‌سازد تا موقعیت‌های زندگی واقعی را مدل‌سازی کند و ارتباطات و پیش‌بینی‌های آگاهانه ایجاد کند. افراد را با مهارت‌هایی که برای تفسیر و تجزیه و تحلیل اطلاعات، ساده‌سازی و حل مشکلات، ارزیابی ریسک و تصمیم‌گیری آگاهانه نیاز دارند، مجهز می‌کند [۳۰]. ریاضیات نقش مهمی در زمینه‌هایی مانند علم یا فناوری ایفا می‌کند و برای تحقیق و توسعه در زمینه‌هایی مانند مهندسی، علوم محاسباتی، پزشکی و مالی حیاتی است. یادگیری ریاضیات به کودکان و جوانان دسترسی به برنامه درسی گسترده‌تر و فرصتی برای پیگیری مطالعات و علایق بیشتر می‌دهد. از آنجایی که ریاضیات غنی و محرک است، یادگیرندگان را در هر سنی با توجه به علایق و توانایی‌های آن‌ها جذب می‌کند [۴۰]. یادگیری ریاضیات استدلال منطقی، تجزیه و تحلیل، مهارت‌های حل مساله، خلاقیت و توانایی تفکر به روش انتزاعی را توسعه می‌دهد. زبان ریاضیات از یک زبان جهانی از اعداد و نمادها استفاده می‌کند که به یادگیرندگان امکان می‌دهد ایده‌ها را به روشی مختصر، بدون ابهام و دقیق با هم مرتبط کنند. ناردی و کنوت<sup>۱</sup> [۳۷] بر این باورند که برای رویارویی با چالش‌های قرن بیست و یکم، هر جوان باید در استفاده از مهارت‌های ریاضی اعتماد داشته باشد. درک نقشی که ریاضیات تقریباً در تمام جنبه‌های زندگی ایفا می‌کند بسیار مهم است. این نیاز به ریاضیات برای ایفای نقشی جدایی ناپذیر در یادگیری مادام‌العمر را تقویت می‌کند و درک و فهم مفاهیم ریاضیات از اهمیت خاصی برخوردار می‌شود. از نظر شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا یا NCTM<sup>۲</sup>، برای درک مناسب از ریاضی و عمل در ریاضی به کارگیری ریاضی در حل مسائل، صرف آموزش موضوعات ریاضی کافی نیستند، بلکه طراحی برنامه آموزشی و تعیین حد و مرزها در مفاهیم و روش‌های آموزشی بسیار مهم و اساسی می‌باشند. اصول آموزش ریاضی از مهمترین موضوعات زیربنایی است که به نظر می‌رسد سیاست‌های آموزش ریاضی بر اساس آن طرح ریزی می‌شود [۴۳]. همانطور که مشخص است، اصول قوانینی است که بدون اثبات و تجزیه و تحلیل پذیرفته می‌شود [۱۴]. اصول آموزش ریاضی ویژگی‌های خاص آموزش ریاضی با کیفیت قابل قبول را توصیف می‌کند [۲۱]. در سال ۲۰۰۰، NCTM اصول آموزش را مساوات<sup>۳</sup> (عدالت آموزشی)، برنامه درسی<sup>۴</sup>، تدریس<sup>۵</sup>، یادگیری<sup>۶</sup>، ارزیابی<sup>۷</sup> و فناوری<sup>۸</sup>

<sup>1</sup>Nardi and Knuth

<sup>2</sup>National Council of Teachers of Mathematics

<sup>3</sup>Equity

<sup>4</sup>Curriculum

<sup>5</sup>Teaching

<sup>6</sup>Learning

<sup>7</sup>Assessment

<sup>8</sup>Technology

اعلام کرد و این شش مورد را برای آموزش ریاضیات در هر نقطه‌ای از جهان پایه‌ای و اساسی بر شمرد. در جدول ۱، معنا و تعریف این اصول از دید شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا ارائه شده است. با توجه به

جدول ۱: اصول آموزش ریاضی

اصول آموزش ریاضی	تعریف و توضیح
مساوات	تعالی در آموزش ریاضی مستلزم مساوات و حمایت قوی از تمام دانش‌آموزان است.
برنامه‌ی درسی	یک برنامه درسی چیزی بیش‌تر از مجموعه فعالیت‌هاست. این برنامه باید منسجم باشد و بر ریاضیات مهمی متمرکز شود که به خوبی در سراسر پایه‌ها تحصیلی قرار گرفته است.
تدریس	تدریس موثر ریاضی مستلزم این درک است که دانش‌آموزان چه می‌دانند و نیاز به یادگیری چه چیزی دارند و سپس به چالش انداختن و حمایت آن‌ها برای خوب یادگیری آن‌هاست.
یادگیری	دانش‌آموزان باید ریاضی را با درک و فهم یاد بگیرند و فعالانه دانش جدید را بر اساس تجربه و دانش قبلی بسازند.
ارزیابی	ارزیابی باید حامی یادگیری ریاضیات مهمی باشد که دانش‌آموز یاد گرفته است و اطلاعات مفید را هم به معلمان و هم به دانش‌آموزان بدهد.
تکنولوژی	در تدریس و یادگیری ریاضی، تکنولوژی حیاتی است. تکنولوژی بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود تاثیر می‌گذارد و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقاء می‌دهد.

موارد اشاره شده در جدول بالا (جدول ۱)، این باور وجود دارد که اگر فعالیت‌های آموزشی مطابق با این اصول توسعه یابند، می‌توانند یادگیری مفاهیم و محتوای ریاضی را برای معلمان و دانش‌آموزان جذاب و قابل درک کنند تا آن‌ها از این اصول در برنامه‌ریزی و تدریس درس خود بهره ببرند. معلمان و آموزگاران ریاضی همیشه در تلاش هستند تا تاثیری را که بر یادگیری ریاضی دانش‌آموزان خود دارند، افزایش دهند که اصول آموزش ریاضی می‌توانند به آن‌ها در رسیدن به این هدف کمک نماید [۳۰]. بر اساس دیدگاه شورای معلمان ریاضی آمریکا، اصول آموزش ریاضی زمینه را برای تدوین استانداردهای آموزش ریاضی اعم از محتوایی و فرآیندی آماده کرده است [۷]. در عمل ریاضی، عوامل و مهارت‌های خاصی در کارند که آن‌ها را استانداردهای آموزش ریاضی می‌نامند [۲۰]. استانداردها بر دو نوع محتوایی و فرآیندی می‌باشند. استانداردهای محتوایی که به محتوا می‌پردازد اینکه چه مباحثی را باید بخوانند، هر مبحث را تا چه حدی گسترش دهند، چه مفاهیمی و تا چه مقداری در کتاب‌ها گنجانده شود. این استاندارد شامل اعداد و عملیات، جبر، هندسه، اندازه‌گیری، تحلیل داده‌ها و احتمال می‌باشد. استانداردهای محتوایی، ریاضیاتی را که باید در هر پایه تدریس شود را مشخص می‌کنند [۹، ۱۱]. در جدول ۲، استانداردهای محتوایی از منظر اهداف و برنامه آموزشی آن‌ها به صورت کامل آمده است. استانداردهای محتوایی و اهداف آن‌ها که در جدول ۲ ارائه گردید و در بستر استانداردهای فرآیندی

## جدول ۲: استانداردهای محتوایی آموزش ریاضی

اهداف آموزشی	استاندارد محتوایی
درک اعداد و روش‌های نمایش اعداد، فهمیدن روابط بین اعداد و دستگاه‌های اعداد، درک مفاهیم اعمال ریاضی و ارتباط بین آن‌ها و شمردن به طور روان و تخمین زدن معقولانه.	اعداد و عملیات
درک کردن نمونه‌ها، روابط و توابع، دانستن طرز نمایش و تحلیل ساختارها و موقعیت‌های ریاضی، استفاده از نمادهای جبری، استفاده از مدل‌های ریاضی برای نمایش و درک روابط کمی، تجزیه و تحلیل تغییرات در زمینه‌های متفاوت.	جبر
تحلیل شاخص‌ها و خواص اشکال هندسی دو بعدی و سه بعدی و چند بعدی و توسعه بحث‌های ریاضی درباره روابط هندسی، شناختن مکان‌ها و توصیف روابط مکانی با استفاده از هندسه مختصاتی و دیگر دستگاه‌های نمایش، به کاربردن انتقال و استفاده از تقارن برای تحلیل موقعیت‌های ریاضی، استفاده از تجسم و تصور ذهنی، استدلال مکانی و مدل‌سازی هندسی برای حل مسائل.	هندسه
درک ویژگی‌های قابل اندازه‌گیری در اشیاء، شناخت واحدها و دستگاه‌ها و روندهای اندازه‌گیری، استفاده از روش‌ها، ابزارها و فرمول‌های مناسب برای تعیین اندازه‌ها.	اندازه‌گیری
تنظیم پرسش‌هایی که می‌تواند بر اساس داده‌ها عنوان شود، جمع‌آوری و فراهم کردن و نمایش داده‌های مناسب برای پاسخ‌دهی به پرسش‌ها، انتخاب و استفاده از روش‌های آماری مناسب برای تجزیه و تحلیل داده‌ها.	تحلیل داده‌ها و احتمال
در تدریس و یادگیری ریاضی، تکنولوژی حیاتی است. تکنولوژی بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود تاثیر می‌گذارد و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقاء می‌دهد.	تکنولوژی

مورد استفاده قرار می‌گیرد. قابل ذکر است هرچند کریمی فردین پور و گویا [۲۰، ۲۱] به صورت مختصر به این استانداردهای فرآیندی اشاراتی کرده‌اند ولی این مقاله برای اولین اصول و استانداردهای آموزش ریاضی را به صورت کامل و یکپارچه ارائه کرده است.

## ۲. استانداردهای فرآیندی

شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا بر این باور است که برنامه درسی مناسب باید بر حل مساله، ایجاد ارتباط بین مباحث ریاضی، برقراری ارتباط با مفاهیم ریاضی با استفاده از زبان مناسب و ایجاد عدالت در یادگیری برای همه دانش‌آموزان متمرکز باشد. سالهاست که راهبردهای پیشنهادی NCTM در پی تغییر و بهبود الگوهای تدریس معلمان است و به جای دانش رویه‌ای تأکید زیادی بر درک مفهومی دارد. این شورا، شش استاندارد فرآیندی در آموزش ریاضی را در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای توصیه می‌کند و

همچنین بر لزوم به کارگیری آن‌ها در آموزش ریاضی تأکید می‌کند. استانداردهای فرآیندی روش‌های کسب دانش محتوایی را مورد بحث قرار می‌دهند [۸]. همان گونه که در اصول و استانداردها تأکید شده است [۲۱]، استانداردهای فرآیندی، ماهیتی متفاوت از مباحث و موضوعات مختلف ریاضی دارند، ولی هر یک از آن‌ها در فرآیند یادگیری ریاضی در همه‌ی پایه‌های تحصیلی مدرسه حاکم هستند. این استانداردها مشخص می‌کنند که به چه شیوه‌ای ریاضیات مورد نظر باید تدریس شود و چگونه دانش‌آموزان با انجام دادن ریاضیات می‌توانند آن را فراگیرند [۱۰]. شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا استانداردهای فرآیندی را استدلال و اثبات، پیوند و ارتباطات، بازنمایی، گفتمان، حل مساله و مدل‌سازی و کاربرد آن می‌داند که استاندارد مدل‌سازی استاندارد جدیدی است که به تازگی به استانداردهای فرآیندی آموزش ریاضی از طرف NCTM در سال ۲۰۲۰ اضافه شده است. به دلیل اهمیت استانداردهای فرآیندی در آموزش ریاضی، در این مقاله به توضیح و تشریح کامل آن‌ها پرداخته شده است.

۱.۲. استدلال و اثبات. امام جمعه و دافعی [۴] بیان داشته‌اند شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) معتقد است که برنامه‌های آموزشی از پیش دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید همه‌ی دانش‌آموزان را قادر سازد تا استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی ریاضی، تشخیص دهند؛ حدسیه‌های ریاضی بسازند و راجع به درستی آن‌ها، تحقیق کنند. ادعاها و اثبات‌های ریاضی بسازند و آن‌ها را ارزیابی کنند؛ انواع مختلف استدلال و روش‌های اثباتی را انتخاب و استفاده کنند. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین تعاریف اثبات عبارت است از یک استدلال معقول و منطقی از حقایق قابل قبول. نکته‌ای که در این تعریف باید به آن توجه کرد تفاوت اثبات و استدلال است. استدلال دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است [۷]. استفاده از استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می‌گویند. برگر، مکنزی و هولمز<sup>۹</sup> [۲۸] بر این باورند با توجه به نظر آموزشگران ریاضی، نقش اثبات در ریاضی را می‌توان تایید درستی یک عبارت؛ توضیح چرایی درستی یک عبارت؛ ایجاد ارتباطات با دانش ریاضی؛ کشف یا خلق جدیدی در ریاضی و نظام‌دار کردن عبارت‌ها در یک نظام اصل موضوعی دانست. به نظر می‌رسد که هیچ کس در جامعه‌ی ریاضی، با این ادعا مخالفتی ندارد که ریاضی یک علم استنتاجی است و مشخصه‌ی آن اثبات است. بر مبنای دیدگاه مشترک ریاضیدان‌ها، ریاضی با ایده‌ها و اصول موضوع اولیه شروع می‌شود و سپس به وسیله‌ی آن‌ها، تمام ایده‌های بعدی تعریف می‌شوند. تمام قضیه‌هایی هم که اصل موضوع نیستند، از اصول موضوع و به وسیله‌ی قوانین مشخص استنباطی، اثبات می‌شوند [۱۷]. محققان اهمیت استدلال و اثبات را در ریاضیات مورد بحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشان می‌دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات، غیرممکن است. برخی از آن‌ها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. همچنین، آن‌ها در تحقیقات خود نشان می‌دهند دانشی که فاقد توجیه کردن است، به راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به عنوان علمی مستدل به

<sup>9</sup>Berger, Mackenzie and Holmes

جای مجموعه‌ای از رویه‌ها یاد گرفته می‌شود، دانش به دست آمده به راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. در واقع، استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند فعالیت‌های ریاضی را به عنوان یک مجموعه‌ی منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیم‌شان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند [۳۸]. ریاضیدانان معتقدند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری، به دقت ابزار بستگی دارد. آزمایش نیز به طور قطع ثابت نمی‌کند، زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست [۳۳]. البته در برخی موارد، بین ریاضیدانان نیز نظرات و دیدگاه‌های مختلفی در مورد نقش و اهداف اثبات و آنچه که یک اثبات را می‌سازد، مشاهده می‌شود. همان گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضیدانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند [۱۳]. باید توجه داشت که اساس ریاضیات، استدلال است. در حالیکه علم توسط مشاهده تایید می‌شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تایید قرار می‌گیرد. بنابراین جوهری ریاضیات در اثبات‌ها نهفته است و باید به تفاوت بین مثال، حدسیه و اثبات، توجه کرد. نتایج ریاضی، تنها زمانی معتبر هستند که دقیقاً اثبات شوند [۱۶]. می‌توان درستی نتایج را در تعداد محدودی از حالت‌ها به طور مستقیم نشان داد ولی دانش‌آموزان باید بدانند که تمام آنچه به آن‌ها نشان داده شده است، تنها مربوط به همان حالت‌های خاص است و تا زمانی که آن نتیجه کاملاً به اثبات نرسیده است، تنها شاهدهی است برای یک حدس. لایتنر<sup>۱۰</sup> چهار گام را در فرایند استدلال معرفی می‌کند که تقریباً مشابه مراحل حل مساله به روش پولیا<sup>۱۱</sup> است؛ نخست موقعیتی سؤال برانگیز و دشوار پیدا می‌شود که مشخص نیست چگونه باید اقدام کرد. دوم، شخص تلاش می‌کند که راهبردی برای حل مساله انتخاب کند (به یاد آورد، بسازد و یا کشف کند). سپس بررسی می‌کند که آیا راهبرد مورد نظر، مساله را حل می‌کند یا نه و اگر نه، به دنبال راهبرد دیگری خواهد بود. سوم، این مرحله که اجرای راهبرد نامیده می‌شود، می‌تواند از طریق استدلال‌های تأییدکننده حمایت شود؛ بدین صورت که شخص در پی آن است که آیا راهبرد مورد نظر به کار می‌آید؟ وگرنه دوباره راهبرد دیگری انتخاب و اجرا می‌شود. چهارم، مرحله آخر یعنی نتیجه‌گیری، بعد از طی مراحل بالا یک نتیجه‌ی کلی به دست می‌آید [۵]. باکویی و همکاران [۵] مشخص کردند که لایتنر نیز بین دو نوع استدلال تمایز قائل می‌شود که عبارتند از استدلال تقلیدی؛ که از روی عادت و تکرار یاد گرفته می‌شود و دو نوع دارد از قبیل استدلال به یادسپاری؛ (مربوط به حافظه)، برای مثال، دانش‌آموزی که یک مساله را با استفاده از یک جواب کامل و معین در کتاب درسی یا حل شده توسط معلم حل می‌کند و استدلال الگوریتمی؛ که در آن یک مساله از طریق به کار بردن رویه‌ای معین حل می‌شود. دوم، استدلال خلاقانه؛ شامل دنباله‌ای از استدلال‌های جدید است که براساس اصول ریاضی هستند. تفاوت مهم

<sup>10</sup>Lithner

<sup>11</sup>Polya

بین استدلال تقلیدی و خلاقانه این است که نوع اول ضرورتاً شامل تفکر مفهومی و تحلیلی نیست، در حالی که به گفته لایتنر، چنین فرایند تفکری برای استدلال خلاقانه ضروری است. پنج نوع فعالیت استدلالی را که عموماً در قلمرو پیش از اثبات به آن‌ها توجه می‌شود و دارای سلسله مراتب هستند، چنین مطرح می‌شوند؛ اول، شناخت و ساخت الگوها. اولین مهارت، شناخت و ساخت الگوها یا قوانین برای کشف مسائل معین است. دوم، توصیف الگوها؛ پس از تسلط بر مرحله اول، دانش‌آموزان شروع به توصیف الگوها از طریق قانون‌گذاری به صورت رسمی (استفاده از نمادهای جبری) یا غیررسمی (مثلاً توصیف روایتی) می‌کنند. سوم، حدسیه‌سازی که پس از تسلط بر مرحله‌ی دوم دانش‌آموزان حدسیه‌سازی می‌کنند. یعنی قادر هستند که الگو یا قانونی را بیان کنند که به طور کلی درست است؛ گرچه آن‌ها هنوز ضرورت اثبات کردن را نمی‌دانند. چهارم، استدلال استقرایی که ممکن است دانش‌آموزان با بررسی چند مثال و مورد خاص، درستی حدسشان را تأیید کنند و پنجم، بگویند که گزاره موردنظر همیشه درست است. استدلال استنتاجی، اثبات صوری، درک شهودی، استدلال تمثیلی، استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، بازگشتی و برهان خلف از موارد اثبات و استدلال در حل مسائل اثباتی و حتی حل‌کردنی است [۱۳].

۲.۲. اتصالات و ارتباطات (ارتباطات مفهومی). آوزبل<sup>۱۲</sup> [۲۷] بر این عقیده است که برای این‌که یادگیری معنادار اتفاق بیافتد سه شرط لازم است. ابتدا، یادگیرنده باید رابطه‌ای بین مفاهیمی که باید آموخته شود، احساس کند. دوم، یادگیرنده باید دارای دانش خاص مرتبط با مطالب جدید باشد تا بتواند ارتباط برقرار کند. سوم، یادگیرنده به صورت عملی بخواهد دانش جدید را به دانشی که قبلاً داشته مرتبط کند. درک ارتباطات و اتصالات در ریاضیات توسط دانش‌آموزان به منظور توانمند کردن برای توصیف موقعیت‌های پیچیده و کنترل دقیق وضعیت‌ها ضروری است. در واقع فهمیدن به عنوان اندازه کمی و کیفی اتصالاتی تعریف می‌شود که یک ایده با ایده‌های موجود فرد دارد [۲]. یکی از اهداف بسیار مهم که باید در فرآیند یادگیری ریاضی به آن دست یافت، توانایی برقراری ارتباط و اتصال بین خود موضوعات ریاضی و همچنین بین مفاهیم ریاضی با دیگر رشته‌ها توسط یادگیرندگان می‌باشد [۲۹]. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] اعلام کرده است برنامه‌های آموزشی از پیش دبستانی تا کلاس دوازدهم باید به هر دانش‌آموز این امکان را بدهد که ارتباط بین ایده‌های ریاضی را بشناسد و از آن‌ها استفاده کند؛ درک کند که چگونه ایده‌های ریاضی به یکدیگر متصل می‌شوند تا یک کل منسجم ایجاد کنند و نهایتاً ریاضیات را در زمینه‌های خارج از آن بشناسد و به کار ببرد. ارتباطات مفهومی یعنی رابطه بین مفاهیم، روش‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، موضوعات ریاضی و همچنین ارتباط ریاضی با سایر موضوعات. مفاهیم و ایده‌های ریاضی در ارتباط با یکدیگرند و شناخت این ارتباطات، درک و یادگیری ریاضیات را عمیق‌تر می‌سازد [۲۱]. تسهیل کردن برقراری ارتباط و اتصال در میان مباحث ریاضیات و میان مباحث ریاضی و دیگر حوزه‌های یادگیری برای ایجاد درک گسترده‌ای که می‌خواهیم کودکان به آن دست یابند، بسیار مهم است. با روشن شدن ارتباطات، بین ایده‌های مختلف ریاضی، کودکان در یادگیری ریاضی توانمندتر

<sup>12</sup>Ausubel



می‌شوند. برقراری ارتباط به طور اتفاقی و تصادفی رخ نمی‌دهد و بسیاری از دانش‌آموزان معمولاً به تنهایی نمی‌توانند ارتباطات مفهومی این روابط را تشخیص دهند، بلکه باید به وضوح آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین معلمان باید برای روشن کردن این ارتباطات برنامه‌ریزی کنند. در واقع، موثرترین آموزش در صورتی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان از دانش از قبل دانسته شده شروع کنند و از طریق تعامل با معلمان و دانش‌آموزان دیگر، این دانسته‌ها را مبنای کارشان قرار دهند. در نتیجه، برنامه‌ریزی برای رشد این ارتباطات، به طور مستقیم هم کارآیی تدریس را افزایش می‌دهد و هم به بهبود یادگیری کودکان کمک می‌کند [۳۸]. یو<sup>۱۳</sup> [۴۴] برخی از شاخص‌های توانایی برقراری ارتباط و اتصال ریاضی را بیان می‌کند. این شاخص‌ها عبارتند از پیدا کردن رابطه بین بازنمایی‌های مختلف از مفاهیم و رویه‌ها، درک رابطه بین موضوعات ریاضی؛ استفاده از ریاضیات در سایر علوم و زندگی روزمره؛ درک مفهوم معادل یا روش مشابه؛ یافتن ارتباط بین یک رویه و رویه‌ی دیگر در نمایش معادل؛ به کاربردن اتصالات در میان موضوعات ریاضی و بین ریاضی و سایر موضوعات. برای مثال ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم ریاضی و علمی مانند فیزیک و جغرافیا و همچنین ارتباط و اتصال خود مفاهیم ریاضی به عنوان نمونه مفهوم حد با مفهوم انتگرال از مظاهر کاربرد این استاندارد در فرآیند آموزش ریاضی است.

۳.۲. بازنمایی (نمایش‌های ریاضی). بازنمایی درک بهتر یک مفهوم است که با استفاده از تمثیل یا چیز دیگر برای آن استفاده می‌شود. همچنین بازنمایی‌ها دانش‌آموزان را وادار می‌کنند که برای آموزش، یادگیری و تعمیم‌دادن یک مفهوم، از چند جهت به آن توجه کنند و ابعاد گسترده، کلی و اجزای مفهوم را شناسایی و رابطه بین عناصر را تعیین کنند [۱۸]. مهارت بازنمایی مربوط به نمایش داده‌ها و اطلاعات و آنچه که در ذهن دانش‌آموز می‌گذرد، می‌باشد. این مهارت کمک بسیاری برای درک بهتر مطالب و برقراری ارتباط با دیگران می‌کند، یعنی نشان دادن یک مفهوم ریاضی با روش‌های مختلف. این مهارت مربوط به نمایش داده‌ها و آنچه که در ذهن دانش‌آموز می‌گذرد، می‌باشد. برخی از روش‌های بازنمایی مفاهیم ریاضی عبارتند از بازنمایی دنیای واقعی، تصویری، کلامی، نمادین، ذهنی و فیزیکی [۱۸]. سراجی و سیفی بر این باورند که برنامه‌های آموزشی از پیش دبستانی تا کلاس دوازدهم باید به هر دانش‌آموز این امکان را بدهد تا مواردی مانند ایجاد و استفاده از نمایش برای سازماندهی، ثبت، و ارتباط ایده‌های ریاضی؛ انتخاب، اعمال، و ترجمه از میان نمایش‌های ریاضی برای حل مسائل و همچنین از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تفسیر پدیده‌های فیزیکی، اجتماعی و ریاضی استفاده کند [۱۲]. بازنمایی‌ها دانش‌آموزان را وادار می‌کنند که برای آموزش، یادگیری و تعمیم دادن به مفهوم، از چند جهت به آن مراجعه کنند و ابعاد گسترده، کلی و اجزای مفهوم را شناسایی و رابطه‌ی بین عناصر را تعیین کنند. نمودارها، نقشه‌ها، جدول‌ها، نمادها و علائم و غیره همگی برای نمایش مفاهیم ریاضی هستند. از نمایش‌های ریاضی به عنوان ابزاری برای فهم و درک و تجزیه و تحلیل ایده‌های ریاضی و حل مسائل مختلف و توضیح موقعیت‌های مساله‌گونه استفاده می‌شود. بنابراین دانش‌آموز هر شکل از صورت‌های نمایشی

<sup>13</sup>Yue

را باید تشخیص دهد و در جای مناسب به کار گیرد. وقتی چند بازنمایی به طور مرتبط به دانش‌آموزان ارائه می‌شود، نسبت به بازنمایی‌های منفرد، بیشتر باعث درک انتزاعی یادگیرندگان می‌شوند. ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های متفاوت و اتصال و ارتباط آن‌ها به یکدیگر، باعث به وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها به کمک یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به سادگی می‌توانست حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها سازگارتر و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرار گرفته بود [۲۲]. بازنمایی‌هایی که در یادگیری و حل مسائل ریاضی از آن‌ها استفاده می‌شوند عبارتند از بازنمایی ملموس (وضعیت‌های دنیای واقعی)، بازنمایی فیزیکی (ابزار دست‌ورزی که به تنهایی معنای خاصی ندارند و براساس اعمالی که انجام می‌دهند معنا پیدا می‌کنند)، بازنمایی تصویری (شکل‌ها و تصویرها)، بازنمایی گفتاری (زبان روزمره) و بازنمایی نوشتاری که از طریق آن کلمات و جملات معنای خاصی می‌گیرند [۲۶]. برای مثال در بازنمایی تصویری، دانش‌آموزان از مشاهده یا رسم یک شکل، نمودار یا تصویر، به‌طور شهودی برای فکر کردن درباره یک مفهوم ریاضی و ارتباط برقرار کردن با آن استفاده می‌کنند. قربانی [۱۸] سخت معتقد است بازنمایی و گفتمان در یادگیری ریاضی دو فرآیند به هم گره خورده می‌باشند. توجه ویژه و طرح‌ریزی‌هایی که معلمان برای گفتمان ریاضی انجام می‌دهند تا به دانش‌آموزان کمک کنند که بر یادگیری خویش بازنمایی داشته باشند می‌تواند تبدیل به یک بخش طبیعی از یادگیری ریاضی شود. حتی دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی نیز می‌توانند توضیح دادن جواب یک مسئله و شرح دادن استراتژی‌هایی که بکار می‌برند را یاد بگیرند. می‌توان به دانش‌آموزان دوره‌ی اول متوسطه کمک کرد تا یاد بگیرند با صدای بلند فکر کنند و در تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤال‌های معلم و هم‌کلاسی‌های خود استدلال‌های خود را بازنگری کنند. با چنین تجربیاتی دانش‌آموزان مهارت سازمان دادن و ثبت افکار ریاضی خود را به‌دست خواهند آورد [۳۱].

#### ۴.۲. گفتمان.

با توجه به اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، استاندارد گفتمان را اینگونه توصیف می‌کنند که گفتمان یک بخش ضروری از ریاضی و بخش مهمی از جریان یاددهی و یادگیری آن است [۲۵]. گفتمان وسیله‌ای است برای درمیان گذاشتن اندیشه‌ها و شفاف‌شدن آنچه که یک فرد می‌داند. وقتی ایده‌ای یا پنداشتی بیان می‌شود تبدیل به موضوعی برای بحث کردن شده و در مورد آن تأمل و موشکافی می‌شود تا در نهایت آن پنداشت اصلاح شود. چنین فرآیندی به ساخته شدن مفاهیم ریاضی، شکل‌گیری معانی و تداوم اندیشه‌ها کمک می‌کند و به آن‌ها عمومیت می‌بخشد. دانش‌آموزان زمانی که در چالشی برای انتقال یافته‌های فکری خودشان و دیگران قرار دارند درباره‌ی ریاضی و استدلال ریاضی فکر می‌کنند و این کمکی برای منطقی‌تر شدن آن‌ها خواهد بود. گوش دادن یا خواندن توضیحات دیگران فرصتی برای دانش‌آموز است تا دانسته‌های خودشان را بسط دهند و درست استدلال کردن و چگونه متقاعد کردن دیگران را بیاموزند. گفت‌وگو درباره‌ی چگونگی پیدا شدن اندیشه‌ها و ایده‌های ریاضی موجب جلب توجه دانش‌آموزان به مبحث مورد نظر خواهد شد [۲]. دافعی، نصر و

مقدمی [۱۰] بیان داشته‌اند استاندارد گفتمان از چهار زیر استاندارد تشکیل شده‌است، اول، دانش‌آموزان افکار ریاضی خود را در ضمن گفتمان سازمان‌دهی کنند و آن‌ها را تثبیت کنند. دوم، دانش‌آموزان قادر باشند افکار و استراتژی‌های دیگران را تجزیه و تحلیل و ارزشیابی کنند. سوم، دانش‌آموزان افکار ریاضی خود را مرتبط و یکپارچه و به طور شفاف و واضح به هم‌کلاسی‌ها و معلم‌ها و دیگران انتقال دهند. چهارم، دانش‌آموزان قادر باشند زبان ریاضی را به‌طور روشن و آشکار برای بیان ایده‌های ریاضی بکار ببرند. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] معتقدند دانش‌آموزانی که درگیر بحث کردن برای توجیه یک راه‌حل هستند بخصوص وقتی با نظر مخالفی مواجه باشد و در تلاش برای متقاعد کردن هم‌کلاسی‌هایشان که احتمالاً نقطه نظرات متفاوتی دارند به درک و فهم بهتری از ریاضی نایل خواهند شد. سیلور، کیل پاتریک و شلسینگر<sup>۱۴</sup> [۴۱] تأکید می‌کنند وقتی دانش‌آموزی روش حل مسئله را ارائه می‌دهد و از استدلال خود در مقابل هم‌کلاسی‌ها و معلم خود دفاع می‌کند و یا هنگامی که با چیزی که در ذهن او یک معما شده است کلنجار می‌رود بصیرت عمیقی درباره‌ی افکارش به دست می‌آورد. گفتمان در ریاضی می‌تواند به دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم جدید ریاضی کمک کند. چون در این حالت آن‌ها در یک موقعیت واقعی حرکت می‌کنند، به‌طور شفاهی توضیح، تشریح و بیان علت می‌کنند، نمودارها و شکل‌ها را به خدمت می‌گیرند، می‌نویسند، و نمادهای ریاضی را بکار می‌گیرند تا به هدفی که دارند برسند. یعنی آن‌ها برای دفاع از ایده‌های خود و متقاعد کردن دیگران همه ابزارهای ریاضی را می‌شناسند و بکار می‌گیرند و در این میان بدفهمی‌های آنها قابل‌شناسایی می‌شود. بازدهی دیگر این رویدادها این است که دانش‌آموزان به یاد می‌آورند که در مسئولیت‌یادگیری که در کلاس درس اتفاق می‌افتد با معلم خود شریک هستند. لامپرت<sup>۱۵</sup> [۳۴] معتقد است زمانی که تصورات و اندیشه‌هایی درباره‌ی ریاضی در جمعی مطرح می‌شود هم برای دانش‌آموزان مفید است، زیرا بخشی از بحث را به عهده دارند و هم برای معلم مفید است، همچنین می‌تواند با فرآیند یادگیری دانش‌آموزان بیشتر آشنا شود. معلمان باید محیطی در کلاس درس ایجاد کنند که دانش‌آموزان بتوانند آزادانه تصورات و اندیشه‌های خود را بیان کنند. دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی نیز برای اینکه تصورات، پنداشت‌ها و اندیشه‌های خود را با یکدیگر در میان بگذارند به کمک معلم نیاز دارند تا این کار به روشی انجام شود که به اندازه‌ی کافی برای سایر دانش‌آموزان واضح و شفاف باشد. دانش‌آموزان سال‌های آخر دوره‌ی ابتدایی و اوایل دوره‌ی متوسطه باید به تدریج مسئولیت شرکت در بحث‌های کلاسی را بپذیرند و در مقابل یکدیگر مسئولیت‌پذیر باشند و توانایی آن‌ها در گوش کردن، به زبان ساده‌تر بیان کردن، سوال پرسیدن و نظر دیگران را تفسیر کردن افزایش یابد. برای بعضی از دانش‌آموزان شرکت کردن در بحث‌های کلاسی چالش برانگیز و تا حدودی مشکل‌آفرین است. مثلاً برای دانش‌آموزان دوره‌ی اول متوسطه به چشم آمدن در فعالیت‌های گروهی اکراه‌آمیز است. دانش‌آموزان در این سن دوست ندارند معلم بداند که آن‌ها چه چیزی را بلد نیستند. بنابراین سعی می‌کنند از پرسیدن و سوال کردن یا قرار گرفتن در موقعیتی که آن‌ها فکر

<sup>14</sup>Silver, Kilpatrick and Schlesinger

<sup>15</sup>Lampert

می‌کنند می‌توانند به بلد نبودن آن‌ها تعبیر شود اجتناب کنند [۲۰، ۲۱]. با این حال معلم می‌تواند در ایجاد یک محیط خوب کلاسی برای بحث کردن موفق شود. زمانی که دانش‌آموزان از دبیرستان فارغ‌التحصیل می‌شوند، باید از قابلیت‌های درونی صحبت کردن و بحث کردن برخوردار باشند و آن‌ها باید بحث‌های کامل و شفافی را ارائه کنند تا بتوانند در جامعه از خود دفاع کنند. شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] بر این باور است زمانی‌که پنداشت‌ها رد و بدل می‌شوند و مورد انتقادهای متفکران قرار می‌گیرند، پالایش شده و توسعه می‌یابند. در حال حاضر، تغییرات در محل کار به طور فزاینده‌ای نیازمند کار گروهی، همکاری و گفت‌وگو است. ریاضی در دانشگاه‌ها به طور روزافزونی بر توانایی انتقال شفاف پنداشت‌های زبانی و نوشتاری تأکید دارد. در جهت آماده شدن برای آینده، دانش‌آموزان دبیرستانی، باید توانایی داد و ستد و تدریس مؤثر پنداشت‌های ریاضی خود را با دیگران داشته باشند. تعامل با دیگران در واقع فرصتی برای داد و ستد پنداشت‌ها و بازتاب بر آن‌هاست. بنابراین گفت‌وگو یک عنصر اساسی و پایه‌ای در یادگیری ریاضی است.

## ۵.۲. حل مسئله.

در سند منتشر شده NCTM در سال ۲۰۰۶ [۳۸]، درباره‌ی استاندارد حل مسئله این گونه بیان شده است که برنامه‌های آموزشی از پیش دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید همه‌ی دانش‌آموزان را قادر سازد تا دانش ریاضی جدید خود را از طریق حل مسئله بسازند؛ مسائلی را که در ریاضیات یا موقعیت‌های دیگر به وجود می‌آیند را حل کنند؛ برای حل مسائل، یک گستره از راهبردهای متفاوت و متناسب را به کارگیرند؛ بر فرآیند حل مسئله‌ی ریاضی، تأمل و بازبینی داشته باشند؛ در سند راهنمای برنامه‌ی درسی ریاضی ایران نیز حل مسئله به عنوان یکی از مهارت‌های اساسی تفکر ریاضی مورد توجه قرار گرفته است [۱۵]. با این وجود، هنوز در بسیاری از مدارس امروز در جریان تدریس و اجرای برنامه‌های درسی تأکید بر کسب دانش و معلومات از طریق یادگیری طوطی‌وار و حفظی است و معمولاً برای آموزش مهارت‌های تفکر از طریق فرآیند حل مسئله کوشش چندانی صورت نمی‌گیرد. حال آن‌که پولیا تسلط بر ریاضیات را توانایی و مهارت در حل مسئله و به معنای داشتن استقلال اندیشه، عقل سلیم و نیروی نوآفرینی دانسته است. مسئله از دیدگاه پولیا عبارت است از ضرورت جست و جوی آگاهانه‌ی وسیله‌ای مناسب، برای رسیدن به هدفی، که در بدو امر این وسیله غیرقابل دسترس می‌باشد. حل مسئله، به معنای پیدا کردن این وسیله است [۲۴]. شونفیلد [۴۲] ۱۶ مسئله را فعالیتی تعریف می‌کند که در آن دانش‌آموز، علاقمندانه درگیر است و تلاش دارد که راه‌حلی برای آن پیدا کند و وسیله‌ی ریاضی در دسترس و از قبل آماده‌ای که با آن به هدف برسد را ندارد. او دانش و رفتار لازم برای انجام حل مسئله را در چهار مرحله‌ی منابع، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باورها بیان می‌دارد. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا در سند اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه‌ای در دوره‌ی متوسطه به طور مشابهی، حل مسئله را درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و فعالیتی می‌داند که روش حل آن از پیش شناخته شده نیست، به این خاطر برای یافتن راه‌حل، دانش‌آموزان باید آن را از درون دانش خودشان بیرون بکشند و از مسیر این فرآیند آن‌ها اغلب

<sup>16</sup>Schoenfeld

درک و فهم‌های جدید ریاضی را رشد و توسعه خواهند داد. دانش‌آموزان باید فرصت‌های فراوان و متواتر برای صورت‌بندی کردن، گلاویزشدن و حل‌کردن مسائل پیچیده‌ای که نیازمند و مستلزم تلاش و کوشش است، داشته باشند و پس از آن ترغیب شوند که روی تفکرشان بازتاب و عکس‌العمل داشته باشند. با این تعاریف مسئله ریاضی مطرح شده برای یک دانش‌آموز، ممکن است برای دانش‌آموز دیگری مسئله نباشد. حل مساله به روش پولیا شامل چهار مرحله است؛ فهمیدن مسئله، طرح یک نقشه، اجرای نقشه و بازگشت یا نگاه به عقب. در اولین مرحله یعنی «فهمیدن مسئله»، همان‌طور که پولیا می‌گوید باید به صورتی آشکار مشخص شود که چه چیزی خواسته شده است. طبق این الگو شاگرد باید در این مرحله بتواند بخش‌های اصلی مسئله، یعنی «مجهول»، «داده‌ها» و «شرط» مسئله را تعیین کند. شاید دقیقاً نتوان مشخص کرد که از چه زمانی وارد مرحله‌ی دوم یعنی «طرح نقشه» می‌شود [۱۷]. همواره ارتباط‌هایی بین فهم یک مسئله و طرح یک نقشه برای حل آن وجود دارد. به هر میزان که درک بهتری از مسئله حاصل شود، احتمال طرح نقشه‌ای برای حل آن بیشتر خواهد شد. شونفیلد [۲۲] برای تحلیل فعالیت حل مسئله در ریاضی، مدلی شامل چهار عامل را ارائه می‌دهد. این عوامل شامل منابع، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باورها است. منابع، گنجینه‌ی دانش ریاضی فرد است که با آن مسئله و چگونگی اجرا و پیاده‌سازی راه‌حل را می‌فهمد. به عبارت دیگر دانش ریاضی که شخص در ارتباط با مسئله‌ی داده شده، دارا می‌باشد. البته همان‌گونه که شونفیلد اشاره می‌کند این منابع ممکن است معیوب و یا نادرست نیز باشند. رهیافت‌ها، پیشنهاداتی عمومی‌اند که به شخص کمک می‌کند تا مسئله را فهمیده و در حل آن پیشرفت کند. این ساز و کارها شامل رسم شکل، انتخاب نمادهای مناسب، جستجوی مسائل مرتبط و... می‌باشد. کنترل به معنی انتخاب، نظارت، بازبینی و دنبال کردن راه‌حل‌های مناسب و یا اصلاح و ترمیم آن‌هاست. به تعبیری دیگر تصمیمات عمومی راجع به گزینش و به کارگیری منابع و رهیافت‌ها می‌باشد. نظام باورهای فرد نیز شامل دیدگاه او نسبت به موضوع، محیط و خودش است [۴۲]. همچنین میسون، بورتون و استیسی [۳۶] ۱۷ چارچوب حل مسئله را با فرآیند تعمیم و تخصیص با مراحل ورود، حمله و مرور بیان می‌دارند و به معرفی فعالیت‌ها و اقدامات موثر در حل مسئله می‌پردازند. در مورد نقش و هدف حل مسئله در برنامه‌ی درسی سه دسته‌بندی مشخص شده‌است؛ تدریس برای حل مسئله که تدریس محتوای ریاضی برای کاربرد بعدی در حل مسائل ریاضی می‌باشد. در این نوع روش تدریس، معمولاً معلم محتوا و مفاهیم و الگوریتم‌های اولیه‌ی ریاضی را قبل از آنکه یادگیرندگان نیاز به آن‌ها را در حین حل مسئله احساس کنند، به آن‌ها ارائه می‌دهد سپس آن‌ها با دانستن آن مفاهیم و فرمول‌ها و روش‌ها به حل مسئله می‌پردازند. تدریس درباره‌ی حل مسأله، که تدریس استراتژی‌های رهیافتی برای رشد توانایی عمومی در حل مسائل است. در این نوع روش تدریس معلم رهیافت‌هایی نظیر آنچه که پولیا برای حل مسئله پیشنهاد می‌کند، به دانش‌آموزان آموزش می‌دهد. تدریس از راه حل مسئله، که تدریس محتوای استاندارد ریاضی به وسیله‌ی ارائه مسائل غیرروتین در بر دارنده‌ی این محتوا است و در این نوع روش تدریس معلم معمولاً مسئله‌ای از دنیای واقعی، که شامل مفهوم ریاضی در نظر گرفته

شده برای تدریس است را مطرح می‌کند و دانش‌آموزان ضمن حل این مسئله، دانش ریاضی مورد نظر را نیز فرا می‌گیرند [۲۴].

۶.۲. مدل‌سازی. مدل‌سازی ریاضی نمایش ساده و کلی جهان عینی به زبان ریاضی است. از میان مدل‌های گوناگونی که از یک پدیده می‌توان ساخت، بالاترین درجه ساده‌سازی متعلق به مدل‌های ریاضی است [۲۳]. مدل‌سازی ریاضی یک پدیده‌ی واقعی، این قابلیت را دارد تا توصیف، پیش‌بینی، ارزیابی و تصمیم‌گیری درباره‌ی آن پدیده را آسان‌تر نماید [۱۹]. بدیهی است که اگر فعالیت و محیط تصمیم‌گیری پیچیده نباشد، استفاده از مدل‌سازی ریاضی اهمیت چندانی ندارد. اما، اهمیت مدل‌سازی ریاضی زمانی مشخص می‌شود که تعداد متغیرهای تصمیم‌ساز، فعالیت و اهداف به طور سرسام‌آوری افزایش یابند [۱]. بنابراین، مدل‌سازی در ریاضیات، چگونگی انجام آن و بهره‌بردن از مواهب آن در زندگی روزمره و هنگام آموزش، برای یادگیرندگان، دانش‌آموزان و حتی معلمان ریاضیات در دوران مدرسه و دیگر مقاطع ارزشمند خواهد بود. انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۹] در سال ۲۰۲۰ بیان داشت یادگیری بکار بردن مفاهیم ریاضی فعالیتی است که با یادگیری مفاهیم ریاضی متفاوت است. در واقع مهارت‌هایی که باید برای موفق بودن در کاربرد علم ریاضی آموخت با مهارت‌های مورد نیاز برای اثبات قضایا و حل معادلات ریاضی کاملاً متفاوت است. در مدل‌سازی ریاضی مسائلی مختلفی که در دنیای واقعی وجود مورد توجه قرار می‌گیرد و هدف اصلی این است که هر مسئله از زندگی روزمره به صورت یک مسئله ریاضی تبدیل شود. این کار در واقع ماهیت اصلی مدل‌سازی ریاضی است [۶]. فرآیند مدل‌سازی ریاضی در یک نگاه کلی این مراحل را طی می‌کند؛ انتقال مسئله از دنیای واقعی به دنیای ریاضی، پیدا کردن جواب مسئله در دنیای ریاضی، تفسیر جواب و در نهایت بازگشت به مسئله در دنیای واقعی. لوسون و ماریون [۳۵] ۱۸ ابراز داشته‌اند که معلمانی که در حال توسعه ظرفیت دانش‌آموزان برای «مدل‌سازی با ریاضیات» هستند، به صراحت بین سناریوهای دنیای واقعی و نمایش‌های ریاضی آن سناریوها حرکت می‌کنند. کریمی فردین‌پور و گویا بیان کردند مدل‌سازی ریاضی به طور فزاینده‌ای نقش مهمی در بسیاری از علوم ایفا می‌کند. دلیل این امر شاید مزیت‌هایی است که یک مدل‌سازی ریاضی از آن‌ها برخوردار است. مهم‌ترین این مزیت‌ها عبارت است از ریاضی زبانی بسیار دقیق است. این مطلب کمک می‌کند تا ایده‌ها به صورت فرمول در آورده شده و فرض‌های مربوط شناسایی شوند و البته ریاضی زبانی است مختصر و مفید. ریاضی زبانی است که همواره همراه با قوانین تعریف شده برای به کارگیری است. کلیه قوانین ریاضی که در طول سالیان دراز به اثبات رسیده است در اختیار می‌باشد. کامپیوترها می‌توانند برای محاسبات عددی مورد نیاز به نحو بسیار موثری به کار گرفته شوند [۲۱]. اکثر پدیده‌ها در دنیای واقعی بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که بتوان به طور کامل مدل‌سازی شوند. از این رو، اولین سطح ورود به مدل‌سازی، شناسایی مهم‌ترین ویژگی‌های یک پدیده است. این‌ها در مدل گنجانده می‌شوند، بقیه حذف می‌شوند. سطح دوم، مربوط به میزان دستکاری ریاضی است که ارزشمند است. اگرچه ریاضیات پتانسیل اثبات نتایج کلی را دارد، اما این نتایج به شکل

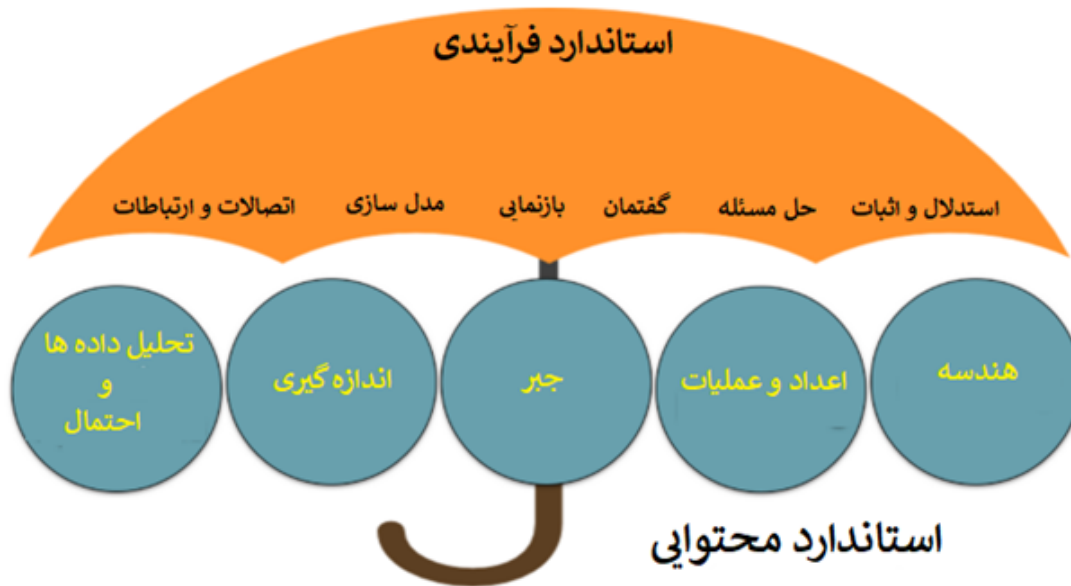
<sup>18</sup>Lawson and Marion

قابل تأملی به شکل معادلات مورد استفاده بستگی دارد. تغییرات کوچک در ساختار معادلات ممکن است نیاز به تغییرات عظیم در روش‌های ریاضی داشته باشد. استفاده از کامپیوترها برای مواجهه با معادلات مدل ممکن است هرگز به نتایج ظریف و دقیقی منجر نشود، اما در برابر تغییرات بسیار قوی‌تر است. مدل‌سازی ریاضی را می‌توان به دلایل مختلف مورد استفاده قرار داد. این‌که یک نتیجه خاص چقدر درست به دست می‌آید، هم به وضعیت دانش در مورد یک پدیده واقعی و هم به خوبی انجام مدل‌سازی بستگی دارد [۳۵]. مدل‌سازی ریاضی فرآیند استفاده از ساختارهای مختلف ریاضی مانند نمودارها، معادلات، نمودارهای پراکنده، نمودارهای درختی و غیره برای نمایش موقعیت‌های دنیای واقعی است. مدل‌سازی یک مدل انتزاعی ارائه می‌دهد که یک مسئله را به ویژگی‌های اساسی آن کاهش می‌دهد. مدل‌های ریاضی به دلایل مختلفی مفید هستند. مهم‌تر از همه، مدل‌ها هسته ریاضی یک موقعیت را بدون اطلاعات اضافی نشان می‌دهند. به عنوان مثال، معادله  $a = b + 6$ ، تمام کلمات غیرضروری را از عبارت اصلی «کروش ۶ سال از پیمان بزرگ‌تر است» حذف می‌کند [۳۲]. به نظر می‌رسد علی‌رغم اینکه استاندارد مدل‌سازی را در فرآیند استانداردهایی مانند حل مسئله، استدلال و اثبات می‌توان دید، اما خود مدل‌سازی یک استاندارد فرآیندی مستقل و مهم در آموزش ریاضی در دوره‌های مختلف آموزشی می‌باشد و توجه و استفاده از آن در فرآیند آموزش می‌تواند زمینه‌ی یادگیری مفاهیم مختلف ریاضی را مهیا سازد.

### ۳. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، برای اولین بار سعی شده است که اصول و استانداردهای آموزش ریاضی در قالب یک مقاله منسجم علمی ارائه گردد. هرچند مطالعات مختلفی در داخل و خارج از کشور در این موضوع انجام شده است، ولی این مطالعات تنها به بخش یا بخش‌هایی از اصول و استانداردهای آموزش ریاضی پرداخته‌اند و به نظر می‌رسد انجام یک مطالعه‌ی کامل که تمام اصول و استانداردهای آموزش ریاضی اعم از محتوایی و فرآیندی را پوشش دهد لازم بود. همچنین لازم به ذکر است که استاندارد فرآیندی مدل‌سازی برای اولین بار در این مطالعه مورد اشاره و تشریح قرار گرفته است. اصول آموزش ریاضی از قبیل مساوات (عدالت آموزشی)، برنامه‌ی درسی، تدریس، یادگیری، ارزیابی و فناوری یک بستری است که شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) برای ارتقاء آموزش و یادگیری ریاضی معرفی کرده‌اند. این اصول زمینه‌ی مناسب برای تدوین محتوای ریاضی و طراحی فرآیند آموزش مفاهیم آن مهیا کرده است که از آن به عنوان استانداردهای آموزش ریاضی نام برده شده است که مشتمل بر استانداردهای محتوایی و استانداردهای فرآیندی است. در ساحت و بستر اصول آموزش ریاضی، استانداردهای محتوایی که عبارتند از اعداد و عملیات، هندسه، جبر، اندازه‌گیری و تحلیل داده‌ها و احتمال تحت پوشش استانداردهای فرآیندی از قبیل استدلال و اثبات، حل مساله، گفتمان، بازنمایی، اتصالات و ارتباطات و مدل‌سازی قرار گرفته‌اند. به بیان دیگر، استانداردهای محتوایی به وسیله استانداردهای فرآیندی از یاددهنده به یادگیرنده منتقل می‌شوند و یادگیری آن‌ها بستگی به کیفیت استفاده از استاندارد فرآیندی دارد. در شکل ۱ چگونگی ارتباط استانداردهای محتوایی و فرآیندی ارائه شده است [۳۹].





شکل ۱: ارتباط استانداردهای محتوایی و فرآیندی

### مراجع

۱. ع. آذر، ا. نجفی و س. نجفی، مدل‌سازی ریاضی استوار، رویکردی نوین در بودجه ریزی عمومی ایران، پژوهش‌های مدیریت در ایران، ۱۵ (۱۳۹۰)، ۱-۱۹.
۲. م. اجدادی، م. اسلام پور و ف. کلاهدوز، ارزیابی مبتنی بر برقراری ارتباطات و اتصالات ریاضی گامی در جهت تحقق یادگیری معنادار و ایجاد انگیزه برای دانش‌آموزان، پنجمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، ۲۷ آذرماه، مازندران، ایران، ۱۳۹۹.
۳. غ. احمدی، ا. ریحانی، و ن. نخستین روحی، تأثیر آموزش مبتنی بر گفتمان ریاضی بر توانایی استدلال ریاضی دانش‌آموزان دوره متوسطه، روان‌شناسی مدرسه، ۴ (۱۳۹۴)، ۲۲-۳۷.
۴. س.م.ر. امام جمعه، و ح. دافعی مهارت‌های فرآیندی در برنامه درسی ریاضی دوره‌ی ابتدایی، نخستین همایش ملی برنامه ریزی و تحول نظام آموزشی، قم، ایران، ۱۳۹۴.
۵. ح. باکوئی، ع. اندی، م.ح. خلیل ارجمندی، م.ح. خلیلی، و س. بالویی، حل مسئله در آموزش ریاضی، چهارمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد، ایران، ۱۳۹۸.
۶. م.ت. جهانپنده، مقدمه‌ای بر مدل‌سازی ریاضی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، ۱۳۹۰.
۷. م. حسینی، ر. دستجردی، م.ر. اسدی یونسی و م. پاکدامن بررسی تأثیر آموزش مبتنی بر استانداردهای فرآیندی NCTM بر نگرش و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه پنجم در درس ریاضی، مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، ۱۰ (۱۴۰۰)، ۱۹۵-۲۱۴.
۸. س.ا. رحمانی، ف. قربانی، ج. شافعی زاده، و ف. استوار، بررسی میزان استفاده از استانداردهای فرآیندی ریاضی در کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی، دومین همایش ملی آموزش ریاضی ابتدایی، گرگان، ایران ۱۳۹۹.
۹. م. رضایی، مبانی آموزش ریاضی، انتشارات دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، ۱۳۹۶.



۱۰. ح. دافعی، ص. نصر، صبا و پ. مقدمی، گفتمان ریاضی؛ مهارتی اثربخش در آموزش ریاضیات دوره‌ی ابتدایی؛ دومین همایش ملی آموزش ریاضی ابتدایی، گرگان، ایران، ۱۳۹۹.
۱۱. م. سادات و م. صادقی، مبانی آموزش ریاضی: جهت استفاده دبیران ریاضی و دانشجو معلمان، انتشارات گلبن، اصفهان، ایران، ۱۳۹۶.
۱۲. ف. سراجی و آ. سیفی، بررسی نقش مهارت‌های یادگیری الکترونیکی بر رضایت و موفقیت تحصیلی دانشجویان مجازی، فناوری آموزش و یادگیری، ۱ (۱۳۹۴)، ۲۱-۵۷.
۱۳. ر. سلطانلو، ف. کلاهدوز و ا. ریحان، چگونه فرآیند حل مسئله‌ی معلمان بهبود یافت، دومین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد، ایران، ۱۳۹۶.
۱۴. س. ح. علم‌الهدایی، اصول آموزش ریاضی، نشر نما، مشهد، ایران، ۱۳۹۵.
۱۵. ص. علی زاده و ع. تنهایی، بررسی تأثیر روش تدریس مبتنی بر حل مساله بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان بیرجند در درس ریاضی، کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شیراز، ایران، ۱۳۹۵.
۱۶. س. غلام آزاد، اعتبارسنجی برنامه درسی حوزه یادگیری ریاضیات، دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی ابتدایی و متوسطه نظری، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۶.
۱۷. س. غلام آزاد، ز. گویا و ع. ر. کیامنش، تأملی در مؤلفه‌های برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای ایران، نظریه و عمل در برنامه درسی، ۹ (۱۴۰۰)، ۱۷۷-۲۰۶.
۱۸. ز. قربانی سی سخت، بررسی اثرا آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی درک دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی از کسرها، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۸۸.
۱۹. م. کاظمی، مدل‌سازی ریاضی و کاربرد آن در مدیریت، مجله دانش و توسعه، ۲ (۱۳۷۴)، ۱۵۵-۱۶۷.
۲۰. ی. کریمی فردین پور و ز. گویا، اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۳ (۱۳۸۵).
۲۱. ی. کریمی فردین پور و ز. گویا، اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، ۲۰۰۰، NCTM، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، پیاپی ۸۷ (۱۳۸۶)، ۲۶-۳۰.
۲۲. ز. گویا و ح. سرشتی، آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی (قسمت اول)، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، ۸۴ (۱۳۸۵).
۲۳. س. ه. میرقادری و م. زندیه، طراحی یک الگوریتم فرا ابتکاری جدید بر اساس رفتار توابع ریاضی  $\tan h$ ،  $x \cos(x)$  چشم‌انداز مدیریت صنعتی، ۱ (۱۳۹۰)، ۱۰۷-۱۲۳.
۲۴. ن. هاشمی، استفاده از بازی در رفع اختلال یادگیری ریاضی در کودکان، پژوهش در آموزش ریاضی، ۴ (۱۴۰۰)، ۵۷-۷۳.
۲۵. ع. ناهیدی، تأثیر آموزش مبتنی بر گفتمان ریاضی بر حل مسائل کلامی، پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۹.
۲۶. ف. نوروزی، ش. بخشعلی زاده و ز. قربانی سی سخت، بازنمایی‌های چندگانه: فرآیندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها، نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش، ۴ (۱۳۸۹)، ۲۳۹-۲۴۹.
27. D.P. Ausubel, *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston: New York, 1968.
28. N. Berger, E. Mackenzie, and K. Holmes, *Positive attitudes towards mathematics and science are mutually beneficial for student achievement: a latent profile analysis of TIMSS 2015*, Aust. Educ. Res. **47** (2020), no. 3, 409-444.
29. G. Bottle, *Teaching Mathematics in the Primary School*, Continuum, UK, 2005.

30. O. Buchbinder and S. McCrone, *Guiding Principles for Teaching Mathematics via Reasoning and Proving*, Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy, 2022.
31. R.W. Emerson and D. Anderson, *What mathematical images are in a typical mathematics textbook? Implications for students with visual impairments*, J. Vis. Impair. Blind. **112**(2018), 20–32.
32. M. Hill, *Best Practices for Mathematical Modeling*, Inspired Ideas, USA, 2018.
33. Y.H. Hu, J. Xing and L.P. Tu, *The effect of a problem-oriented teaching method on university mathematics learning*, EURASIA J. Math. Sci Tech. Ed. **14** (2018) 1695–1703.
34. Lampert, M. *When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching*, Am. Educ. Res. J. **27** (1990), 29–63.
35. D. Lawson and G. Marion, *An introduction to mathematical modelling*, Retrieved from website on August 2016 [http : //www.maths.bris.ac.uk/ madjl/course\\_text.pdf](http://www.maths.bris.ac.uk/madjl/course_text.pdf), 2008.
36. J. Mason, L. Burton, and K. Stacey, *Thinking Mathematically*, Addison-Wesley, 2010.
37. E. Nardi, and E. Knuth, *Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions?* Educ. Stud. Math. **96** (2017), 267–274.
38. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics*, Retrieved from [www.nctm.org](http://www.nctm.org), 2006.
39. National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards of School Mathematics*, Retrieved from [www.nctm.org](http://www.nctm.org), 2020
40. G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, USA, 1982.
41. E.A. Silver, J. Kilpatrick and B. Schlesinger, *Thinking Through Mathematics*, New York: College Board, 1995.
42. A.H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics* (Reprint), J. Educ. **196** (2016), 1–38.
43. J. Van de Walle, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Allyn and Bacon, USA, 2006.
44. H. Yue, *Concept Maps as Assessment Tools in Mathematics: Comparison with Clinical Interviews*, The University of Texas at El Paso, USA, 2008.