

# Dynamic Modeling and Constrained Control of an Aerial Manipulator for Force Control in Interaction with an Environment of Unknown Stiffness\*

R. Ebrahimi<sup>1</sup>, M. J. Sadigh<sup>2</sup>, F. A. Shirazi<sup>3</sup>

**Abstract:** Drones equipped with robotic arms are governed by nonlinear and complex equations. In this study, the dynamic model of a hexarotor equipped with a robotic arm with two degrees of freedom is first derived using the Euler-Lagrange method. Then, to enable interaction between this system and the environment, a controller is designed. To overcome underactuation issue, the system's dynamic equations are rewritten in such a way that some inputs are responsible for trajectory tracking and applying force by the robotic arm on the environment, while others are used to control the hexarotor's state. To control force and position at the end-effector, a combination of a "constrained force controller" and a position controller is employed. Finally, two applied missions are simulated in SimMechanics in the presence of wind disturbances. The simulation results are compared and acceptable performance of the system in interacting with both missions, in the presence of low-speed wind is shown.

**Keywords:** Aerial Robotic Arm, Multi-body System Modeling, Interaction with Unknown environments, Underactuation, Constrained Force Control

## Introduction

In recent years, drones have become a widely used and effective technology in various industries, including delivery, manipulation and monitoring applications. With continuous technological advancements, their applications have significantly expanded. One of the emerging research areas involve integrating robotic arms with drones, creating aerial manipulators that enhance maneuverability and functionality. These systems extend drone applications from passive tasks such as monitoring and imaging to interactive tasks such as infrastructure inspection, maintenance, and emergency operations.

This paper presents an algorithm for controlling a hexarotor drone equipped with a two-degree-of-freedom robotic arm while exerting force on the environment. Due to the inherent instability and nonlinear dynamic of drones, their control is already challenging, and adding a robotic arm further increases the complexity by introducing multi-body dynamics. Previous studies often analyzed the drone and arm dynamics separately, treating their interactions and environmental effects as disturbances. However, this research develops a unified dynamic model and a control approach that simultaneously regulates both position and applied force.

Unlike typical force controllers for robotic arms, the proposed controller is independent of surface stiffness. The control design follows a structured approach: first, the system kinematics are derived, and then its dynamics are modeled using the Euler-Lagrange method. To overcome the underactuation issue, the dynamic equations are rewritten in such a way that some inputs are responsible for trajectory tracking and applying force by the robotic arm on the environment, while others are used to control the hexarotor's state. The desired objectives—position and force control of the end-effector—are defined as constraints, with specific control inputs allocated accordingly. Given that environmental stiffness is often unknown, a constrained-dynamic-based force controller is employed, ensuring robust force application regardless of surface stiffness. This approach enables diverse applications such as surface cleaning, structures vibration analysis, and pressing emergency stop switch in hazardous environments.

## Dynamic Equation of Motion

The dynamic modeling of the system begins with the derivation of its kinematic model. For this purpose, appropriate coordinate frames are defined. In this study, four coordinate frames are established, as illustrated in Figure 1.

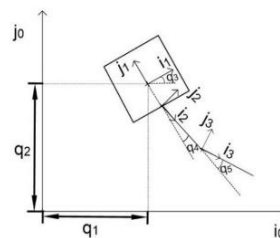


Figure 1: Schematic of the system with coordinate frames and generalized coordinates

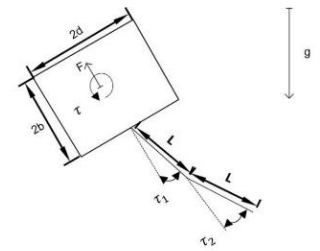


Figure 2: Schematic of the system, including its dimensions, applied forces, and torques

Subsequently, the system's dynamic equations are formulated using the Euler-Lagrange method, expressed as equation (1). In this equation,  $q$  represents the generalized coordinate vector,  $M(q)$  denotes the mass matrix,  $h(q, \dot{q})$  corresponds to the matrix of nonlinear terms such as Coriolis effects,  $T$  is the input vector, and  $B(q)$  is the input vector coefficient matrix. As shown in Figure 2, in the input vector,

\* Manuscript received: November 26, 2024. Revised, January 8, 2025, accepted, ..., ...

<sup>1</sup> Master of Mechanical Engineering, School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Corresponding author, Associate Professor, School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran. **Email:** mjsadigh@ut.ac.ir

<sup>3</sup> Assistant Professor, School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

F represents the vertical thrust force vector of the motors,  $\tau$  denotes the torque applied to the hexarotor by the motors around the pitch angle,  $\tau_1$  corresponds to the torque exerted by the hexarotor on the first link of the robotic arm, and  $\tau_2$  represents the torque applied from the first link to the second link.

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = B(q)T \quad (1)$$

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} F \\ \tau \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

The relationship between the force and torque components and the motor speeds is given as follows.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \\ \Omega_5^2 \\ \Omega_6^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6bl} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \quad (2)$$

In equation (2),  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$  represent angular velocity of each motor,  $b$  and  $l$  respectively denote lift coefficient and drag coefficient of motor propeller.

### Force Control

Considering that the number of inputs is less than the number of outputs of the system, the system is underactuated. There are various methods to address this issue. The approach used in this paper is that some of the system's inputs are used to satisfy artificial constraints, while another portion of the inputs is utilized to meet the general objectives of the system.  $\tau_1$  and  $\tau_2$ , denoted as  $C$ , are allocated to satisfy artificial constraints, while  $F$  and  $\tau$ , denoted as  $U$ , are assigned to meet the general objectives of the system. Considering this aspect and incorporating the artificial constraints ( $g_i(q, t) = 0, i = 1, 2$ ) equation (1) is rewritten as follows.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$g_i(q, t) = 0, i = 1, 2$$

After performing a series of mathematical operations, the first and second rows of equation (3) are obtained as equations (4) and (5), respectively. In these equations,  $\tilde{M}, \tilde{h}, \tilde{B}, M', h',$  are functions of  $M_1, M_2, h_1, h_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, g_1, g_2.$   $\delta$  is the end-effector trajectory tracking error vector, and  $\tilde{D}$  is its coefficient.

$$\tilde{M}\ddot{q} + \tilde{h} = \tilde{B}U + \tilde{D}\delta \quad (4)$$

$$M'\delta + h' = B_{22}C \quad (5)$$

By choosing  $C$  as  $C = B_{22}^{-1}[M'(-K_v\delta - K_p\delta) + h']$  and substituting it into equation (5), equation (6) is obtained. Therefore, by choosing the coefficient matrix ( $K_v^C, K_p^C$ ) to be positive definite, position error convergence to zero is guaranteed.

$$\delta + K_v^C\delta + K_p^C\delta = 0 \quad (6)$$

So far, the discussion has focused on the position control of the end-effector. Next, a "constrained force controller" is employed for force control. The advantage of this controller

is that, unlike typical force controllers, it operates independently of the surface stiffness coefficient. For this controller, it is assumed that the contact between the robot and the environment imposes a constraint, effectively preventing the robot from moving further into the environment. In general, for a non-redundant robot with  $n$  degrees of freedom that acquires  $p$  constraints due to contact with the environment, the constraints can be expressed as equation (7). Additionally, the system's equation of motion is represented by equation (8).

$$\Psi_i(q) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (7)$$

$$M_{n \times n}\ddot{q}_{n \times 1} + h_{n \times 1} = B_{n \times m}\tau_{m \times 1} + A_{n \times p}^T\lambda_{p \times 1} \quad (8)$$

In equation (8),  $\lambda_{p \times 1}$  (the Lagrange multipliers) represents the constraint forces of the system, and the matrix  $A_{n \times p}$  denotes the Jacobian of the constraint equations. For the constrained system above, let  $\underline{x}_{n-p}$  represents the  $n-p$  independent variables, which allow the unique determination of  $q_1, \dots, q_n$  (in this case,  $q_4, q_5$ ) while considering the constraint equations. In fact,  $\underline{g}(\underline{x})$  represents the inverse kinematic equations of the two-degree-of-freedom arm when constrained by contact with a wall. By incorporating equation (7), it uniquely determines the values of  $q_4, q_5$ . By considering equations (7) and (8), performing a series of mathematical operations, and choosing  $C$  as equation (9), the equations (10) and (11) can be derived, proving that the position and force errors at the end-effector converge to zero.

$$C = B_{22}^{-1}[M_2\Sigma(\ddot{x}_d + k_v\dot{\tilde{x}} + k_p\tilde{x}) + h_2 + A^T(\lambda_d + k_f\tilde{\lambda}) - B_{21}U] \quad (9)$$

$$\ddot{x}_d + k_v\dot{\tilde{x}} + k_p\tilde{x} = 0 \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\lambda} = 0 \quad (11)$$

In these equations,  $\Sigma$  is Jacobian of  $\underline{g}(\underline{x})$ ,  $\ddot{x}_d$  represents the second derivative of the desired position,  $\tilde{x}$  denotes the position error,  $\lambda_d$  is the desired force,  $\tilde{\lambda}$  is the force error, and  $k_p$  and  $k_v$  are the PD control coefficient matrices.

Since the constrained force controller is designed for cases where the end-effector is in contact with the environment while following the desired trajectory, it must be combined with a position controller as expressed in equation (12). This combination is necessary because, before the end-effector makes contact with the environment, the system has five independent degrees of freedom, and the position controller operates based on these five degrees of freedom. However, after the end-effector contacts the environment, the system becomes constrained, reducing the number of independent degrees of freedom to four.

$$\begin{aligned} \tau &= K_{pos}(\text{Position Controller}) \\ &+ K_{force}(\text{Constraint Force Controller}) \\ &+ \text{Non Linear Terms in Equation of Motion} \\ &+ \text{External Force} \end{aligned} \quad (12)$$

In control law (12),  $K_{pos}$  is the position controller gain, and  $K_{force}$  is the force-constrained controller gain during the end-effector contacts with the environment. These gains are selected in such a way that before contact with the surface, only the position controller operates, and during contact with

the surface, only the force constrained controller controls the system.

### Simulations and Results

The simulation of the controller introduced in equation (1) was performed in SimMechanics software. In this software, the system model and initial conditions are defined, and interaction with two environments in two missions is carried out. The first environment is a wall (stiffer environment), where the goal is to apply a constant force while allowing vertical displacement of the end-effector (Figure 3). The second environment, which is softer, is an emergency stop switch, where the goal is to simulate the application of a constant force without oscillations in the end-effector position (Figure 4). Additionally, wind disturbances are introduced into the system in both missions.

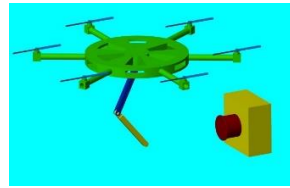
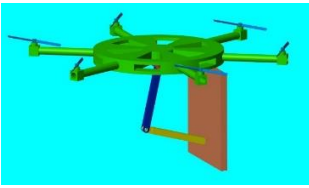


Figure 3: Force control simulation in stiffer environment

Figure 4: Force control simulation in softer environment

Figures 5 and 6 illustrate the simulation results in stiffer environment. From Figure 5\_(a) to Figure 5\_(e), the generalized coordinates of the system are presented. In these Figures, the effects of the system's nonlinear dynamics (particularly in Figures 5\_(a), 5\_(c), and 5\_(d)) are clearly observable. Additionally, the position of the hexarotor's center of mass (Figures 5\_(a) and 5\_(b)) and its pitch angle (Figures 5\_(c)) exhibit oscillatory behavior with a small amplitude. This oscillation is due to both underactuation and internal dynamics, as well as the oscillatory disturbances caused by wind force both of which are expected. These oscillations are also observed in the control inputs (from Figure 6\_(c) to Figure 6\_(f)). Therefore, considering that the system outputs have converged to the desired values and the internal dynamic oscillations remain limited, the system's performance is deemed acceptable.

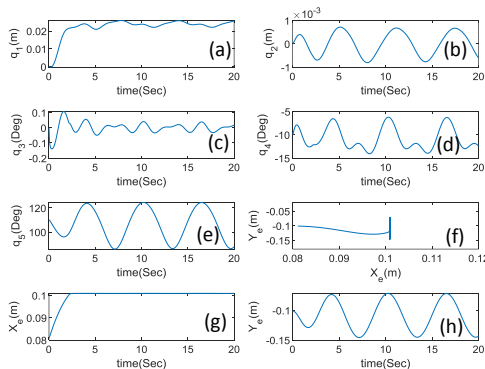


Figure 5: The generalized coordinate diagram, the end-effector trajectory, and the longitudinal and lateral positions of the end-effector over time for the stiffer environment.

After the end-effector makes contact with the vertical surface, the position controller is deactivated, and the force-constrained controller takes over. This transition is clearly visible in Figure 6\_(c) to 6\_(f), which represent the control

signals. The points marked with red circles indicate the moments when the end-effector contacts the wall. As observed, a jump occurs in the control inputs at these points, which is due to the controller switching from position control to force-constrained control. Additionally, Figure 6\_(a), which represents the vertical force exerted on the surface, shows that the desired force is tracked with minimal oscillation. This slight oscillation is caused by the fluctuating wind force disturbance. As a result, the simulation demonstrates that the system successfully accomplishes its mission despite the presence of low-speed wind disturbances.

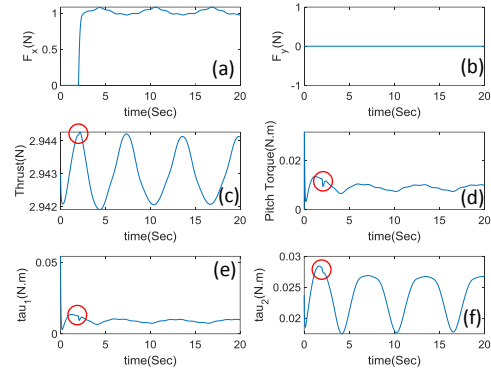


Figure 6: The forces applied to the end-effector and the control signals for the stiffer environment

A similar simulation was conducted for pressing the emergency stop switch. As a result of this simulation, since the end-effector remains stationary at the moment of pressing the switch, the effects of nonlinear dynamics are not observed. Additionally, slight oscillations in some generalized coordinates, similar to the previous simulation, is seen; however, given their limited magnitude, they are considered acceptable. Since the emergency stop switch is softer compared to the wall, no jump is observed in the control inputs this time. This can be explained by the fact that in this simulation, the environment interacting with the end-effector has a lower stiffness coefficient (a softer environment). However, in the first simulation, due to the higher stiffness of the interacting environment, the jumps in the control inputs are more noticeable. Therefore, based on the control signals, the designed controller exhibits greater input jumps for stiffer environments and negligible jumps for softer environments.

### Conclusion

In this paper, the objective is to enable interaction between a hexarotor equipped with a two-degree-of-freedom robotic arm, with its environment. To achieve this, the kinematic equations are first derived, followed by the system's dynamic equations using the Euler-Lagrange method. Given that the system is underactuated, the dynamic equations are rewritten so that some inputs are used for applying force to the environment through the robotic arm, while others are utilized to maintain the hexarotor's state. Subsequently, a combination of a position controller and a force-constrained controller is employed to apply a constant force while allowing vertical oscillation of the end-effector. The advantage of the force-constrained controller in environmental interaction is its independence from the surface stiffness.

To simulate the controller's performance, the hexarotor-arm system is implemented in SimMechanics software, and its functionality is evaluated in two environments. As a result of the simulation, considering the system's underactuation, limited oscillations are observed in the hexarotor's position and pitch angle coordinates. These oscillations are caused by both the system's internal dynamics and external wind disturbances. The first simulation involved applying force to a wall with vertical oscillation along the surface tangent. The end-effector contacted the environment after approximately 2 seconds and applied force with minimal oscillation, which is attributed to fluctuating wind disturbances. Furthermore, due to the oscillatory behavior of the end-effector, the effects of the system's nonlinear dynamics were clearly observed in the generalized coordinates. A desired force of 1 Newton with negligible oscillation is applied perpendicular to the surface. The switching between the position controller and the force-constrained controller resulted in slight jumps in the control inputs, which are minimal and acceptable.

The second simulation is conducted for pressing the emergency stop switch. In this simulation, since the end-effector remained stationary at the moment of pressing the switch, nonlinear dynamic effects are not observed. Additionally, slight oscillations in some generalized coordinates, similar to the previous simulation, are present. Since the emergency stop switch is softer than the wall, no jumps are observed in the control inputs this time. This can be explained by the fact that in this simulation, the environment interacting with the end-effector has a lower stiffness coefficient (a softer environment).

# مدل سازی دینامیکی و کنترل مقید یک بازوی هوایی برای کنترل نیرو در تعامل با محیط با ضریب سفتی نامعلوم\*

مقاله علمی - پژوهشی

فرزاد آیت‌اله‌زاده شیرازی<sup>(۳)</sup>

محمدجعفر صدیق دامغانی زاده<sup>(۲)</sup>

رضا ابراهیمی<sup>(۱)</sup>

**چکیده:** یکی از زمینه‌های در حال توسعه و تکامل در سال‌های اخیر، پهپادهای مجهز به بازوی رباتیک یا بازوهای هوایی است. این بازوها دارای معادلات غیرخطی و پیچیده‌ای هستند و تحت عنوان مسائل چندجسمی مطرح می‌شوند. در این مقاله، ابتدا به مدل‌سازی دینامیکی یک پهپاد شش‌موتوره (هگزاروتور) مجهز به بازوی رباتیک دو درجه آزادی، به کمک روش اویلر - لاگرانژ پرداخته شده است. در ادامه برای تعامل این سیستم با محیط، کنترل‌کننده مناسب طراحی گردیده است. با توجه به اینکه این سیستم دارای نقصان عملکرد در ورودی است، ابتدا معادلات دینامیکی سیستم به شکلی بازنویسی می‌شود که برخی ورودی‌ها وظیفه ردیابی مسیر و اعمال نیرو توسط مجری نهایی بر محیط را انجام داده و برخی دیگر برای کنترل وضعیت هگزاروتور به کار گرفته می‌شود. در ادامه برای کنترل نیرو و موقعیت در مجری نهایی، از ترکیب یک کنترل‌کننده تحت عنوان "کنترل‌کننده مقید نیرو" با کنترل‌کننده موقعیت استفاده شده است. کنترل‌کننده مقید که مبتنی بر دینامیک سیستم‌های مقید است، قادر است نیروی مطلوب را مستقل از ضریب سفتی سطح به آن اعمال نماید. همچنین برای کنترل وضعیت هگزاروتور، از کنترل‌کننده‌های متداول سلسله‌مراتبی استفاده شده است. در نهایت، دو مأموریت کاربردی برای سیستم در دو محیط مختلف تعریف گردید. این دو مأموریت در یک نرم‌افزار شبیه‌ساز نزدیک به واقعیت به نام *SimMechanics*، در حضور اغتشاش باد انجام گردید. نتایج شبیه‌سازی دو مأموریت مقایسه شده و عملکرد سیستم هنگام تعامل با هر دو محیط، در حضور باد با سرعت پایین، مناسب بوده است.

**کلمات کلیدی:** هگزاروتور مجهز به بازوی رباتیک، مدل‌سازی سیستم‌های چندجسمی، تعامل بازوی رباتیک با محیط ناشناخته، نقصان عملکرد، کنترل مقید نیرو

## مقدمه

صنایعی مانند کشاورزی (مانند برداشت محصولات)، عمرانی (مانند نصب تجهیزات در ارتفاعات) و یا تعمیرات و نگهداری از زیرساخت‌ها (مانند بازرسی و تعمیر پل‌ها و توربین‌های بادی) تحول‌آفرین باشد. اگرچه بازوهای هوایی زمینه‌های جدیدی برای پژوهش ایجاد می‌کند؛ اما پژوهشگران را با مشکلات متعددی مانند دینامیک ناپایدار و غیر خطی، طراحی پیچیده‌تر کنترل‌کننده و خطرات ناشی از آزمایش نمونه واقعی مواجه می‌نماید. در پژوهش‌های مختلف سعی شده تا روش‌های مختلفی برای حل این مشکلات معرفی گردد. در [۱] هدف، کنترل موقعیت مجری نهایی برای ردیابی مسیر دایروی یک بازوی هوایی دو درجه آزادی است که عملکرد الگوریتم‌های کنترلی در حضور اغتشاشات خارجی بررسی شده است. در این پژوهش کنترل موقعیت برای ردیابی مسیر دلخواه یک بازوی هوایی با مستقل در نظر گرفتن معادلات پهپاد و بازو انجام شده است. در ادامه برای کنترل پهپاد از یک شبکه عصبی و برای کنترل بازو از یک کنترل‌کننده PID، استفاده شده است. همچنین برای افزایش دقت ردیابی، اثرات متقابل دینامیکی بازو روی پرنده توسط شبکه عصبی تخمین زده شده و جبران‌ساز مناسب به کنترل‌کننده پهپاد اضافه گردیده است. در [۲] برای بازرسی

در دهه اخیر، یکی از فناوری‌های پرکاربرد و مؤثر در صنایع مختلف به‌ویژه صنایع نظامی، پهپادها هستند. با پیشرفت روزافزون فناوری و امکانات، کاربردهای پهپادها نیز به شکل چشمگیری گسترش یافته است. پهپادها به دلیل قابلیت‌های خودکاری و مانورپذیری بالا، برای انجام وظایف مختلف می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. ترکیب بازوهای رباتیک با پهپادها نیز یکی از زمینه‌های جذاب پژوهش‌های اخیر می‌باشد. پهپادهای مجهز به بازوی رباتیک یا به‌اختصار بازوهای هوایی، یک ترکیب قدرتمند از دو فناوری برتر هستند که امکانات بیشتری را در اختیار کاربران قرار می‌دهند. با اضافه کردن یک بازوی رباتیک به پهپادها، مانور سیستم افزایش یافته و دامنه کاردهای آن‌ها از وظایف غیرتعاملی (مانند پایش و تصویربرداری) به وظایف تعاملی (مانند بازرسی فیزیکی زیرساخت‌ها، تعمیرات و نگهداری تجهیزات و انجام عملیات‌های امدادی) گسترش می‌یابد. پتانسیل عظیم اقتصادی و صنعتی بازوهای هوایی، یکی دیگر از مزایای آن‌ها است که باعث ترغیب پژوهشگران به فعالیت در این زمینه شده است. این فناوری می‌تواند در

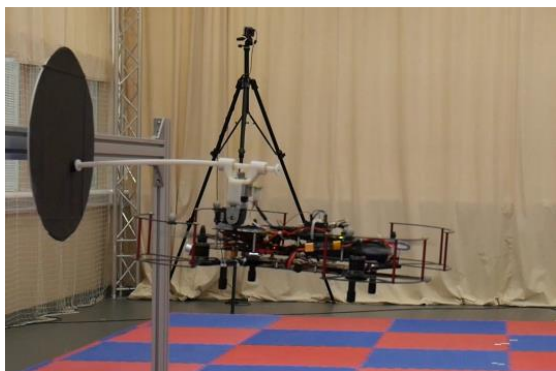
\* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۳/۹/۶ و تاریخ پذیرش ... می‌باشد.

مطلوب، در کنار یک کنترل امپدانس برای رفتار نرم سیستم هنگام تعامل با محیط استفاده شده است. برای بررسی عملکرد این چهارچوب دو مأموریت بستن درب کمد و چرخاندن یک شیر با گشتاور کم تعریف شده است که در نهایت عملکرد سیستم مورد قبول واقع شده است. در [۴] یک بازوی یک درجه آزادی متصل به پهپاد مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پژوهش نیز مشابه [۲] اعمال نیروی ثابت به یک نقطه ثابت انجام شده است با این تفاوت که در محل مفصل بازو، عملگر جهت اعمال گشتاور وجود دارد (شکل ۳).



شکل ۳: پهپاد مجهز به بازوی یک درجه آزادی اولایی [۴]

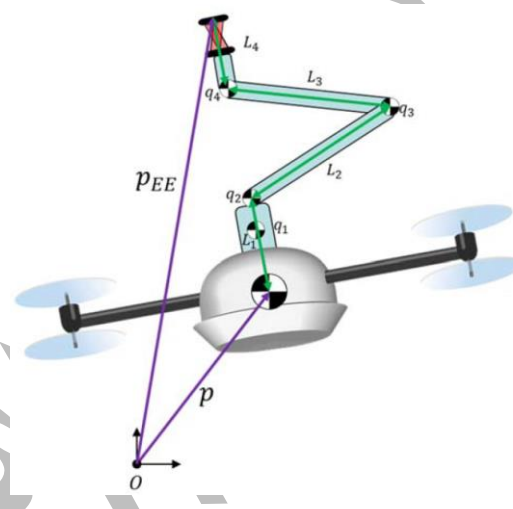
در [۵] علاوه بر درجه آزادی لولایی، یک درجه آزادی کشویی برای بازو در نظر گرفته شده است. همچنین جنس بازو منعطف انتخاب شده تا از اعمال ضربه ناگهانی به سیستم جلوگیری نماید. (شکل ۶)



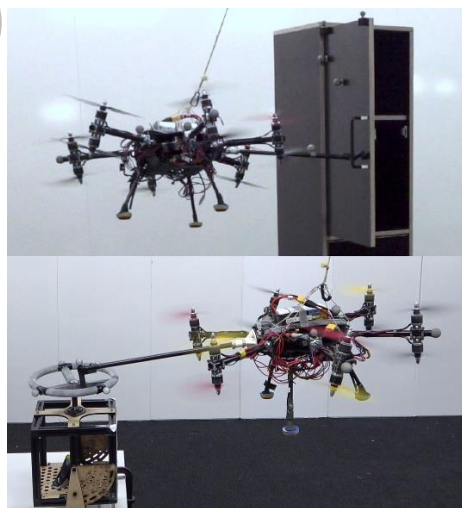
شکل ۴: پهپاد مجهز به بازوی دو درجه آزادی لولایی و کشویی [۵]

در [۶] مسئله جابه‌جایی پهپادها در محیط‌های بسته مورد بررسی قرار گرفته است. در محیط‌های بسته برخلاف محیط‌های باز که آزادی عمل برای جابه‌جایی وجود ندارد، بایستی مکانیزمی طراحی و کنترل شود که وظیفه باز کردن درب را بر عهده داشته باشد. در این پژوهش ضمن انجام این کار با استفاده از یک نمونه واقعی، عملکرد سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. در [۶] یک سیستم متشکل از پهپاد و بازو که در شکل ۵ دیده می‌شود، طراحی گردیده است. در این طراحی از یک پنجه نرم برای مجری نهایی استفاده شده که توانایی گرفتن اجسام سبک را دارد. در این سیستم ابتدا برای ردیابی مسیر و گیرش اجسام، یک کنترل کننده موقعیت طراحی گردیده است. سپس برای بررسی تاثیر اغتشاشات روی سیستم، چند مأموریت در تعامل با محیط انجام شده که پس از بررسی نتیجه مأموریت‌ها، با تخمین اغتشاشات،

پل‌ها از یک پهپاد مجهز به بازوی غیرفعال، متصل به بالای آن، استفاده شده است. غیرفعال بودن بازو به این معنی است که در مفاصل بازو هیچگونه عملگری برای اعمال گشتاور وجود ندارد. همچنین برای تعامل نرم بازو با محیط، از فنرهای پیچشی در مفاصل بازو استفاده گردیده است. شماتیک این سیستم در شکل ۱ دیده می‌شود. در این پژوهش کنترل نیروی عمودی برای تماس مجری نهایی بازو با یک نقطه ثابت انجام گردیده است. برای این منظور نیروی اعمال شده به مجری نهایی بازو، توسط تغییر زاویه مفاصل و مشخص بودن ضریب سفتی فنرهای پیچشی، تخمین زده شده و کنترل نیرو براساس این تخمین انجام شده است.



شکل ۱: شماتیک سیستم مورد بررسی در [۲]



شکل ۲: تصویر مأموریت‌های سیستم مورد بررسی در [۳]

در [۳] برای اجتناب از معادلات دینامیکی پیچیده پهپاد و بازوی رباتیک، از یک پهپاد مجهز به یک میله صلب بدون درجه آزادی استفاده شده است. در این پژوهش یک چهارچوب برای کنترل سیستم هنگام تماس با محیط‌های پویا معرفی شده است. در این چهارچوب برای کنترل، از یک کنترل کننده پیش‌بین نمونه‌بردار محور برای تولید مسیر

که به نوبه خود دارای دینامیک غیرخطی است، پیچیدگی مسئله را بیشتر می‌نماید. در واقع مسئله از یک مسئله دینامیکی ساده تک جسمی پهپاد، به یک مسئله چندجسمی پهپاد و بازوی رباتیکی تبدیل می‌شود.

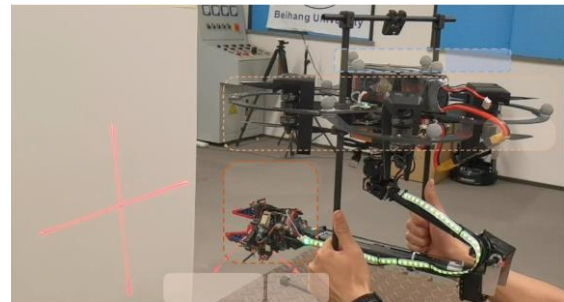
در پژوهش‌های قبلی عمدتاً دینامیک پهپاد و بازو مستقل از هم تحلیل می‌شد و اثرات بازو بر پهپاد و اثر محیط بر بازو به صورت اغتشاش در نظر گرفته می‌شد. در این پژوهش‌ها معمولاً هدف، تعامل با محیط به وسیله کنترل‌کننده موقعیت بود و تلاش پژوهشگران در جهت تخمین اغتشاشات و اضافه نمودن جبران‌ساز برای تعدیل اثر آن‌ها به منظور کنترل موقعیت بهتر بود. اما در مقاله حاضر علاوه بر استخراج دینامیک یکپارچه مجموعه پهپاد و بازو، کنترل هم‌زمان موقعیت و نیروی اعمالی به مجری نهایی برای تعامل با محیط انجام شده است. علاوه بر این، کنترل‌کننده نیروی مورد استفاده در این سیستم که مبتنی بر دینامیک سیستم‌های مقید است، بر خلاف کنترل‌کننده‌های مرسوم نیروی بازوهای رباتیک، مستقل از ضریب سفتی سطح می‌باشد. این الگوریتم کنترلی بایستی به نحوی عمل کند که مجری نهایی بازو با محیط در تعامل باشد و به آن نیرو اعمال نماید. در واقع مجری نهایی بایستی علاوه بر ردیابی مسیر در راستای مماس بر سطح، یک نیروی عمودی بر آن نیز وارد نماید. با طراحی این الگوریتم می‌توان وظایف مختلفی را برای این سیستم‌ها متصور شد. به عنوان مثال وظایفی مانند تمیز نمودن یا بررسی صافی سطح در ارتفاع (با قراردادن سنسور مناسب)، تحریک یک سازه برای تحلیل‌های ارتعاشاتی و یا فشردن کلید قطع اضطراری سیستم‌های مختلف را می‌توان انجام داد.

برای طراحی کنترل‌کننده ابتدا سینماتیک سیستم را استخراج نموده سپس به کمک روش اویلر - لاگرانژ به مدل‌سازی دینامیکی سیستم پرداخته می‌شود. پس از آن باتوجه به نقصان عملگر سیستم، معادلات دینامیکی سیستم به کمک روش ارائه شده در [۱۰] به فرمی بازنویسی می‌گردد که مشکل نقصان عملگر حل شود. در این روش مطلوب مسئله که کنترل موقعیت و نیروی مجری نهایی می‌باشد به صورت قید تعریف می‌گردد سپس تعدادی از ورودی‌ها برای ارضاء این قیدها و تعدادی از ورودی‌ها برای کنترل وضعیت پرنده مورد استفاده قرار خواهد گرفت. با توجه به اینکه در اغلب موارد ضریب سفتی محیط ناشناخته می‌باشد، کنترل‌کننده مقید به منظور حل این مشکل، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این کنترل‌کننده که مبتنی بر دینامیک سیستم‌های مقید می‌باشد، مستقل از ضریب سفتی سطح، نیروی مطلوب را به آن اعمال می‌نماید.

### بیکربندی هگزاروتور مجهز به بازوی رباتیک

همان‌طور که گفته شد سیستم مورد مطالعه در این مقاله یک هگزاروتور مجهز به بازوی رباتیکی دو درجه آزادی است که تصویر آن

از عباراتی جبران‌ساز برای تعدیل اثر اغتشاشات در کنترل‌کننده استفاده شده است. در نهایت اضافه نمودن این جبران‌ساز به کنترل‌کننده، باعث بهبود دقت کنترل موقعیت برای سیستم گردیده است.

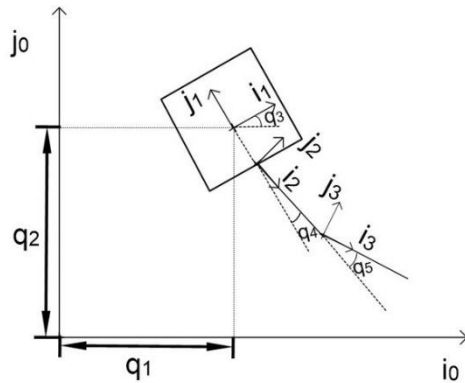


شکل ۵: پهپاد مجهز به بازو مورد بررسی در [۶]

در [۷] از بازوی رباتیک متصل به پرنده برای کنترل برخاست پرنده روی سطوح مرتعش و ناپایدار و سطوح شیب‌دار استفاده شده است. برای این منظور از یک بازوی رباتیکی موازی ۳ لینکه استفاده شده است. عملکرد این سیستم به این صورت است که لرزش سطح زمین که باعث تغییر جهت‌گیری پرنده هنگام برخاست می‌شود، توسط این بازوی رباتیک میرا شده و پرنده به طور عمودی از سطح زمین بلند می‌شود. در [۸] نیز برای بازو و پرنده به طور مستقل طراحی کنترل‌کننده موقعیت انجام گردیده است و برای جبران اثرات دینامیکی بازوی روی پرنده، پس از مدل‌سازی دینامیکی، به طراحی یک کنترل‌کننده مقاوم بر پایه مدل طراحی شده، پرداخته شده است. این پژوهش بر اساس مدل‌سازی انجام شده، اثرات دینامیکی ناشی از بازو را که تحت عنوان اغتشاشات در نظر گرفته شده است، تخمین زده و برای جبران آن، جبران‌ساز مناسب را در کنترل‌کننده اضافه نموده است. در نهایت با استفاده از آزمایش واقعی نتایج تخمین با مقدار واقعی مورد مقایسه قرار گرفته است. لازمه انجام پژوهش‌هایی که ذکر شد، تخمین موقعیت پهپاد و بازوی رباتیکی است. موقعیت بازوها به سادگی و به کمک سنسورهای موقعیت زاویه‌ای قابل اندازه‌گیری است. اما اندازه‌گیری موقعیت دقیق پهپاد چالش‌برانگیز و نیازمند تلفیق سنسورهای مختلف می‌باشد که [۹] نمونه‌ای از این کار است. در این پژوهش تخمین موقعیت پرنده با تلفیق سنسورهای مختلفی مانند شتاب‌سنج‌ها و دوربین‌های تخمین موقعیت انجام شده است. البته با توجه به اینکه در مقاله حاضر شبیه‌سازی در محیط نرم‌افزاری انجام شده است، فرض بر این است که موقعیت پرنده و بازو با دقت مناسبی در دسترس است.

در ادامه پژوهش‌های انجام شده، هدف این مقاله ارائه الگوریتمی به منظور کنترل سیستم متشکل از یک پهپاد شش موتوره (هگزاروتور) و بازوی رباتیکی دو درجه آزادی، هنگام اعمال نیرو به محیط است. به دلیل ناپایداری ذاتی پهپادها و معادلات غیرخطی آن‌ها، کنترل پهپادها یکی از زمینه‌های چالش‌برانگیز است و اضافه نمودن یک بازوی رباتیکی

- دستگاه ۲: دستگاه بدنی متصل به لینک اول در محل اتصال به پرده
- دستگاه ۳: دستگاه بدنی متصل به لینک دوم در محل اتصال به لینک اول



شکل ۷: شماتیک سیستم به همراه دستگاه‌های مختصات و مختصات تعمیم یافته

در این دستگاه‌ها راستای های  $k, j, i$  به ترتیب همان راستای  $Z, Y, X$  هستند. در ادامه برای نوشتن سینماتیک مسئله، بایستی مختصات تعمیم یافته نیز تعریف گردد که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

- $q_1, q_2$ : مختصات موقعیت مرکز پرده در دستگاه اینرسی
- $q_3$ : مختصه تعمیم یافته که برای جهت گیری پرده تعریف می‌گردد. (در این مسئله زاویه دوران عمود بر صفحه یعنی زاویه پیچ پرده)
- $q_4$ : زاویه دوران دستگاه ۲ نسبت به دستگاه ۱ (زاویه دوران لینک اول نسبت به پرده)
- $q_5$ : زاویه دوران دستگاه ۳ نسبت به دستگاه ۲ (زاویه دوران لینک دوم نسبت به لینک اول)

برای محاسبه سینماتیک مسئله، ماتریس همگن انتقال و دوران دستگاه‌های مختصات نیز تعریف شده و به صورت رابطه (۱) محاسبه می‌شود [۱۲]. (برای رعایت ابعاد ماتریس‌ها، یک سطر عدد ثابت ۱ به انتهای بردارهای موقعیت افزوده می‌شود). به عنوان مثال ماتریس همگن انتقال و دوران دستگاه ۰ به دستگاه ۱:

$$H_0^1 = TR \quad (1)$$

که در آن  $T$  ماتریس انتقال و  $R$  ماتریس دوران است. به عنوان نمونه منظور از  $T_x^{q1}$  ماتریس انتقال در راستای محور  $X$  به اندازه  $q_1$  و منظور از  $R_z^{q3}$  ماتریس دوران در راستای محور  $Z$  به اندازه  $q_3$  است.

در شکل ۶ دیده می‌شود. شش موتور هگزاروتور، به کمک شش میله صلب به بدنه متصل شده است. در اثر کارکرد این موتورها در محل نصبشان روی میله صلب، یک نیرو و یک گشتاور که هر دو در راستای قائم هستند، وارد می‌شود. این نیرو و گشتاور به ترتیب ناشی از اثر لیفت و درگ ملخ موتورها می‌باشد. برای معادل‌سازی اثر این نیرو و گشتاورها روی هگزاروتور، برآیند تمامی آن‌ها با یک مؤلفه نیروی عمود بر پهپاد و سه مؤلفه گشتاوری وارد بر آن در نظر گرفته می‌شود [۱۱]. در ادامه راجع به رابطه بین این نیرو و گشتاورها با دور موتورها توضیح داده خواهد شد.



شکل ۶: پیکربندی هگزاروتور مجهز به بازو

بازوی مورد استفاده در این مقاله دارای دو درجه آزادی لولایی می‌باشد که به قسمت پایینی و مرکزی پرده متصل شده است. همچنین فرضیاتی که برای این سیستم در نظر گرفته شده است عبارتند از:

۱. لینک‌های بازوی ربانیک صلب در نظر گرفته شده است.
۲. از اصطکاک بین مفاصل بازو، صرف نظر شده است و محل عملگرهای گشتاور در مفاصل بازو در نظر گرفته شده است.
۳. از اصطکاک بین مجری نهایی بازو و محیط صرف نظر شده است.
۴. باتوجه به اینکه تعامل سیستم با محیط در سرعت‌های کم انجام می‌شود از نیروهای مقاومت هوا که با سرعت متناسب می‌باشد صرف نظر شده است.

## مدلسازی سینماتیکی

برای مدل‌سازی دینامیکی سیستم ابتدا بایستی مدل سینماتیکی آن استخراج گردد. برای این منظور بایستی دستگاه‌های مختصات مناسب تعیین گردد. برای این مسئله ۴ دستگاه مختصات تعریف گردیده است که در شکل ۷ مشخص می‌باشد. این دستگاه‌ها عبارت‌اند از:

- دستگاه ۰: دستگاه مختصات ثابت و متصل به زمین که محور  $Z$  آن خلاف جهت گرانش است.
- دستگاه ۱: دستگاه بدنی متصل به مرکز پرده



است. به طور مشابه لاگرانژین برای لینک اول و دوم ( $Lg_{a2}$  و  $Lg_{a1}$ ) با استفاده از سرعتها و سرعتهای زاویه‌ای به دست آمده در قسمت سینماتیک، محاسبه می‌شود و لاگرانژین کل سیستم به صورت معادله (۹) نوشته می‌شود.

$$Lg = Lg_h + Lg_{a1} + Lg_{a2} \quad (9)$$

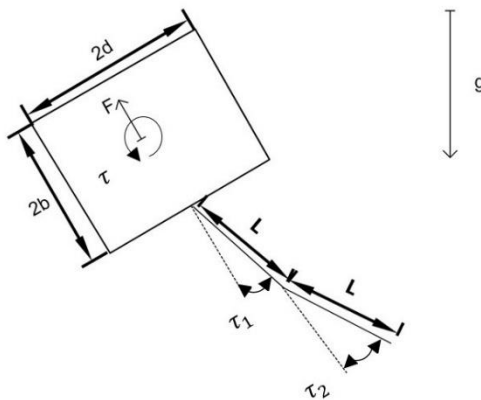
و در نهایت معادلات حرکت سیستم به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lg}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial Lg}{\partial q_i} \right) = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (10)$$

که در رابطه (۱۰)  $Q_i$  ها ورودی‌های سیستم هستند که با روش کار مجازی به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$Q_1 = -F \sin q_3, \quad Q_2 = F \cos q_3, \quad Q_3 = \tau, \quad Q_4 = \tau_1, \quad Q_5 = \tau_2 \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)،  $F$  برآیند نیروی موتورها،  $\tau$  برآیند گشتاور موتورها،  $\tau_1$  گشتاور اعمالی از پرنده به لینک اول بازو و  $\tau_2$  گشتاور اعمالی به لینک دوم بازو از طریق لینک اول می‌باشد که در شکل ۸ دیده می‌شوند.



شکل ۸: شماتیک سیستم به همراه ابعاد، نیرو و گشتاورهای وارد به آن

تمامی معادلات به کمک نرم‌افزار متلب استخراج و به فرم کلی زیر درآمده است.

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = B(q)T \quad (12)$$

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} F \\ \tau \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

در رابطه (۱۲)،  $M(q)$  ماتریس جرم،  $h(q, \dot{q})$  ماتریس ترم‌های غیرخطی مانند اثرات کریولیس و  $T$  ماتریس ورودی‌های سیستم است.

#### رابطه بین برآیند نیروها و گشتاورها با سرعت موتورها

در [۱۱]، رابطه بین مولفه نیرو و گشتاورها با دورموتورها به صورت رابطه (۱۳) آورده شده است.

#### سینماتیک پرنده

برای محاسبه سینماتیک پرنده، ماتریس همگن با ضرب ماتریس‌های انتقال به اندازه  $q_1, q_2$  به ترتیب در دو راستای  $X, Y$  و ماتریس دوران به اندازه  $q_3$  حول محور  $Z$ ، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$H_0^1 = T_x^{q1} T_y^{q2} R_z^{q3} \quad (2)$$

مختصات مرکز پرنده نیز در دستگاه ۱ به صورت زیر است.

$$\rho_1^1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (3)$$

یادآوری می‌شود که سطر عدد ۱ اضافه شده به  $\rho_1^1$  تنها به منظور رعایت ابعاد در ضرب ماتریسی می‌باشد.

مختصات مرکز پرنده در دستگاه اینرسی ۰ به کمک تبدیل همگن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\rho_0^1 = H_0^1 \rho_1^1 \quad (4)$$

همچنین سرعت مرکز جرم پرنده با مشتق‌گیری از موقعیت آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$v_0^1 = \dot{\rho}_0^1 \quad (5)$$

بردار سرعت زاویه‌ای پرنده نیز بر حسب زاویه دوران پیچ نسبت به دستگاه اینرسی ۰ به صورت زیر است.

$$\omega_0^1 = [\dot{q}_3 \quad 0 \quad 0]^T \quad (6)$$

#### سینماتیک لینک اول و دوم

به طور مشابه برای لینک اول و دوم سینماتیک محاسبه می‌شود. در این محاسبات،  $v_0^2$  سرعت مرکز لینک اول نسبت به دستگاه اینرسی ۰،  $v_0^3$  سرعت مرکز لینک دوم نسبت به دستگاه اینرسی ۰،  $\omega_0^3$  بردار سرعت زاویه‌ای لینک اول نسبت به دستگاه اینرسی ۰ و  $\omega_0^3$  بردار سرعت زاویه‌ای لینک دوم نسبت به دستگاه اینرسی ۰ می‌باشد.

#### مدل‌سازی دینامیکی

برای محاسبه معادلات دینامیکی سیستم از روش اویلر - لاگرانژ استفاده می‌شود و لاگرانژین به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۳].

$$Lg = T - V \quad (7)$$

که در رابطه بالا  $T$  انرژی جنبشی یک جسم صلب و  $V$  انرژی پتانسیل آن نسبت به یک میدان گرانش است. لاگرانژین پرنده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$Lg_h = T_h - V_h = \frac{1}{2} v_0^1 m_1 v_0^1 + \frac{1}{2} \omega_0^1 I_1 \omega_0^1 - m_1 g \rho_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در رابطه بالا  $m_1$  جرم پرنده و  $I_1$  ماتریس ممان اینرسی پرنده حول دستگاه گذرنده از مرکز جرم پرنده و هم‌جهت دستگاه بدنی ۱

نهایی بازوی دولینکی، تحت عنوان  $C = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$  اختصاص داده می‌شود

و  $F$  و  $\tau$  برای کنترل موقعیت پرنده تحت عنوان  $U = \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix}$  در نظر گرفته می‌شود. معادلات حرکت سیستم که قبلاً به صورت رابطه (۱۲)

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = B(q)U \quad (16)$$

$$g_i(q, t) = 0, i = 1, 2$$

$g_i$  ها در واقع قیدهایی هستند که در صورت ارضا شدن مطلوب مسئله حاصل می‌شود. در این مسئله رابطه سینماتیک مستقیم مجری نهایی برای این قیدها، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$x = q_1 + b \sin q_3 + l \sin(q_3 + q_4) + l \sin(q_3 + q_4 + q_5) \quad (17)$$

$$y = q_2 - b \cos q_3 - l \cos(q_3 + q_4) - l \cos(q_3 + q_4 + q_5) \quad (18)$$

$$g_1 = x - x_d \quad (19)$$

$$g_2 = y - y_d \quad (20)$$

که در روابط (۱۷) تا (۲۰)،  $X, Y$  به ترتیب موقعیت طولی و عرضی  $x_d, y_d$  به ترتیب موقعیت مطلوب طولی و عرضی مجری نهایی می‌باشد. حال می‌توان مسئله را بر حسب ورودی‌های در نظر گرفته شده به صورت زیر بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} U \quad (21)$$

که در آن

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -\sin q_3 & 0 \\ \cos q_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است.

با ضرب طرفین معادله (۲۱) در  $[I \quad -B_{12}B_{22}^{-1}]$  به شرط آنکه ماتریس  $B_{22}$  وارون پذیر باشد، (که وارون پذیر هست) برای سطر اول معادله، رابطه (۲۲) به صورت زیر دست می‌آید.

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{h} = \bar{B}U \quad (22)$$

که در آن

$$\bar{M}_{3 \times 5} = M_1 - B_{12}B_{22}^{-1}M_2$$

$$\bar{h}_{3 \times 1} = h_1 - B_{12}B_{22}^{-1}h_2$$

$$\bar{B} = B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}$$

است.

از طرف دیگر می‌توان  $C$  را از حل سطر دوم معادله (۲۱) به صورت رابطه (۲۳) محاسبه نمود.

$$C = B_{22}^{-1}(M_2\ddot{q} + h_2 - B_{21}U) \quad (23)$$

در معادله (۲۳)،  $C$  نشان دهنده رابطه‌ای است که باعث اعمال  $g_i$  ها به صورت قید مصنوعی می‌شود.

$$\begin{bmatrix} F_t \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b & b & b \\ -bl & -bl & -bl & bl & bl & bl \\ \frac{-bl\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{bl\sqrt{3}}{2} & \frac{bl\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{bl\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-bl}{-c} & c & -c & c & -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \\ \Omega_5^2 \\ \Omega_6^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)،  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$  دور موتورهای هگزاروتور،  $b$  ضریب نیروی لیف ملخ موتورها،  $C$  ضریب درگ ملخ موتورها،  $l$  طول بازوی متصل به موتور هگزاروتور،  $F_t$  برآیند عمودی نیروی موتورها،  $M_x, M_y, M_z$  سه مولفه گشتاوری برآیند ناشی از نیروی موتورها بر بدنه هگزاروتور، می‌باشد. همچنین برای محاسبه دور موتورها بر حسب نیرو و گشتاورهای برآیند، ماتریس شبه معکوس رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود که به صورت رابطه (۱۴) خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \\ \Omega_5^2 \\ \Omega_6^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6bl} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{bl}{c} \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} & \frac{bl}{c} \\ 1 & -1 & -\sqrt{3} & -\frac{bl}{c} \\ 1 & -2 & 0 & \frac{bl}{c} \\ 1 & -1 & \sqrt{3} & -\frac{bl}{c} \\ 1 & 1 & \sqrt{3} & \frac{bl}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_t \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

رابطه (۱۴) بیانگر این موضوع است که مستقل از وضعیت پرنده در هر لحظه، می‌توان برآیند نیرو و گشتاورهای وارد بر پرنده را به دور موتورها نگاشت نمود. برای این مسئله باتوجه به حرکت دوبعدی سیستم، رابطه (۱۴) به صورت رابطه (۱۵) ساده می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \\ \Omega_5^2 \\ \Omega_6^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6bl} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \quad (15)$$

که در رابطه بالا،  $F$  برآیند نیروی موتورها و  $\tau$  برآیند گشتاور موتورها مطابق با نحوه نمادگذاری برای این مقاله می‌باشد.

## کنترل

### کنترل موقعیت

سیستم دینامیکی مورد بررسی دارای ۵ درجه آزادی، ۴ ورودی و ۲ خروجی ( $X, Y$  مجری نهایی) است. باتوجه به اینکه تعداد عملگرها از تعداد درجات آزادی سیستم کمتر است، سیستم دارای نقصان عملگر می‌باشد. رویکردهای مختلفی برای کنترل سیستم‌ها با نقصان عملگر وجود دارد روشی که در این مقاله استفاده شده است، استفاده از رویکرد به کار برده شده در [۱۰] می‌باشد. در این روش بخشی از ورودی‌های سیستم، برای ارضاء قیدهایی مصنوعی استفاده شده و بخش دیگری از ورودی‌های سیستم، در جهت خواسته‌های کلی ربات به کار گرفته می‌شود. باتوجه به اینکه خروجی مطلوب ۲ عدد ( $X, Y$  مجری نهایی) و ورودی‌های سیستم ۴ عدد است، دو ورودی  $\tau_1$  و  $\tau_2$  برای کنترل مجری

دارای  $p$  قید شده است، می توان قیدها را به صورت معادله (۳۰) نوشت. همچنین معادلات حرکت سیستم به صورت معادله (۳۱) بیان می گردد.

$$\Psi_i(q) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (30)$$

$$\underline{M}_{n \times n} \ddot{q}_{n \times 1} + \underline{h}_{n \times 1} = \underline{B}_{n \times m} \underline{I}_{m \times 1} + \underline{A}_{n \times p}^T \underline{\lambda}_{p \times 1} \quad (31)$$

که در رابطه (۳۱)،  $\underline{\lambda}_{p \times 1}$  (تکثیرکننده لاگرانژ) مقدار نیروهای قیدی سیستم هستند و ماتریس  $\underline{A}_{n \times p}$  نشاندهنده ژاکوبین معادلات قید است که به صورت زیر بیان می شود.

$$\underline{A} \dot{q} = 0 \quad \text{یا} \quad \underline{A} = \frac{\partial \Psi}{\partial q} \quad (32)$$

در این مقاله برای کنترل بازوی رباتیک دو درجه آزادی مقدار  $n = 2$  می باشد. همچنین تنها یک درجه آزادی مجری نهایی مقید شده است بنابراین یک معادله قید وجود دارد ( $p = 1$ ). معادله این قید سینماتیک مستقیم بازو در راستای محور طولی موقعیت مجری نهایی، در حالتی که موقعیت پرنده ثابت است، به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\Psi_1(q) = l \sin(q_4) + l \sin(q_4 + q_5) - x_d = 0 \quad (33)$$

حال برای سیستم مقید فوق  $\underline{x}_{n-p}$  نشان دهنده  $n - p$  متغیر مستقل باشد که به کمک آن همواره بتوان به نحوه یگانه ای (با در نظر گرفتن معادلات قید) مقادیر  $q_1, \dots, q_n$  را محاسبه نمود (در این مسئله مقادیر  $q_4, q_5$  به قسمی که

$$q = g(\underline{x}) \quad (34)$$

$$\underline{A} \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} = 0 \quad (35)$$

در واقع  $g(\underline{x})$  معادله سینماتیک معکوس بازوی دو درجه آزادی در حالتی که در تماس با دیوار مقید شده، است و با در نظر گرفتن رابطه (۳۵) به نحوه یگانه ای مقادیر  $q_4, q_5$  را محاسبه می کند. براین اساس با دو بار مشتق گیری از رابطه (۳۴) خواهیم داشت.

$$\dot{q} = \underline{\Sigma} \dot{\underline{x}} \quad (36)$$

$$\ddot{q} = \underline{\Sigma} \ddot{\underline{x}} + \dot{\underline{\Sigma}} \dot{\underline{x}} \quad (37)$$

که در آن تابع  $\underline{\Sigma}$  نشاندهنده ژاکوبین  $q$  بر حسب  $\underline{x}$  است که به صورت زیر بیان می شود.

$$\underline{\Sigma} = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \quad (38)$$

با جای گذاری روابط فوق برای  $\dot{q}$  و  $\ddot{q}$  در معادلات حرکت سیستم بازوی دو درجه آزادی (رابطه (۳۳)) و پیش ضرب آن در  $\underline{\Sigma}^T$ ، معادلات کاهش مرتبه یافته سیستم به صورت زیر به دست می آید.

$$\underline{M}^* \ddot{\underline{x}} + \underline{h}^* = \underline{\tau}^* \quad (39)$$

که در آن

$$\underline{M}^* = \underline{\Sigma}^T \underline{M}_2 \underline{\Sigma} \quad , \quad \underline{h}^* = \underline{\Sigma}^T \underline{h}_2 \quad , \quad \underline{\tau}^* = \underline{\Sigma}^T [\underline{B}_{22} \underline{C} + \underline{B}_{21} \underline{U}]$$

برای طراحی کنترل کننده مدار بسته به منظور اعمال قیدهای مصنوعی، فرض می شود که در حین حرکت قیدهای مصنوعی شکسته شده و در موقعیت مجری نهایی به اندازه  $\delta$  انحراف ایجاد گردد.

$$g_i(q, t) = \delta_i, i = 1, 2 \quad (24)$$

کنترل مدار بسته طراحی شده باید بتواند مقدار انحراف را به نحو مجانبی به صفر میل دهد. برای طراحی کنترل کننده مربوط، از رابطه (۲۴) دو بار مشتق گرفته می شود و رابطه (۲۵) حاصل می شود.

$$\underline{A}_{2 \times 5} \dot{q} + \underline{A}_{2 \times 5} q = E(t) + \delta \quad (25)$$

با افزودن این معادله به معادلات (۲۲) معادلات حرکت سیستم با در نظر گرفتن انحراف در قیدها به صورت زیر به دست می آید.

$$\tilde{M} \ddot{q} + \tilde{h} = \tilde{B} U + \tilde{D} \delta \quad (26)$$

که در آن

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \underline{M} \\ \underline{A} \end{bmatrix}, \tilde{h} = \begin{bmatrix} \underline{h} \\ \underline{A} \dot{q} - E(t) \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

است. در رابطه بالا  $I_{2 \times 2}$  ماتریس مربعی واحد، و  $0_{3 \times 2}$  ماتریس صفر است. با جاگذاری  $\dot{q}$  از رابطه (۲۶) در رابطه (۲۳)، فرم معادلات برای ورودی های بازوی دو لینکی به صورت زیر به دست می آید.

$$\underline{M}' \delta + \underline{h}' = \underline{B}_{22} C \quad (27)$$

که در آن

$$\underline{M}' = \underline{M}_2 \tilde{M}^{-1} \tilde{D} \\ \underline{h}' = \underline{M}_2 \tilde{M}^{-1} (\tilde{B} U - \tilde{h}) + \underline{h}_2 - \underline{B}_{21} U$$

است.

با انتخاب  $C$  به صورت زیر

$$C = \underline{B}_{22}^{-1} [\underline{M}' (-K_v \delta - K_p \delta) + \underline{h}'] \quad (28)$$

و جاگذاری در رابطه (۲۷) معادله دینامیک خطای  $\delta$  به صورت زیر خواهد بود.

$$\ddot{\delta} + K_v^C \dot{\delta} + K_p^C \delta = 0 \quad (29)$$

بنابراین با انتخاب ماتریس ضرایب به صورت مثبت معین، همگرایی خطا به صفر تضمین می شود.

### کنترل مقید نیرو

روش های انجام شده برای کنترل نیرو معمولاً متکی به اطلاع از رابطه نیرو - جابجایی برای محیط هستند (به طور مثال  $f = k_e x$ ). در این قسمت روشی مبتنی بر دینامیک سیستم مقید معرفی خواهد شد که نیازی به اطلاع از رابطه نیرو - جابجایی برای محیط ندارد. به این منظور فرض می شود که تماس ربات با محیط موجب ایجاد قید شده و عملاً مانع حرکت ربات به سمت داخل محیط می شود. در این صورت برای یک ربات  $n$  درجه آزادی غیرافزونه که در اثر تماس با محیط

و در هنگام تماس با سطح، تنها کنترل‌کننده مقید نیرو سیستم را کنترل نماید. برای ضرایب ذکر شده روابط (۴۷) و (۴۸) انتخاب گردیده است. که در این روابط،  $x$  موقعیت طولی مجری نهایی،  $x_e$  موقعیت طولی سطح محیط و  $u$  تابع پله واحد است.

$$K_{pos} = 1 - u(x - x_e) \quad (47)$$

$$K_{force} = u(x - x_e) \quad (48)$$

### شبیه‌سازی

در ادامه به شبیه‌سازی کنترل‌کننده طراحی شده در یک محیط نرم‌افزاری پرداخته خواهد شد. محیط نرم‌افزاری در نظر گرفته شده برای این منظور، SimMechanics است. این نرم‌افزار امکان شبیه‌سازی و تحلیل سیستم‌های مکانیکی مانند ربات‌ها، سیستم‌های تعلیق خودرو، تجهیزات ساخت‌وساز و ... را در یک محیط نزدیک به واقعیت فراهم می‌کند. جهت استفاده از این نرم‌افزار کافی است مدل فیزیکی مکانیزم موردنظر را با بهره‌گیری از بلوک‌های موجود در کتابخانه (بلوک‌های نماینده لینک‌ها، مفاصل و عناصر نیرویی و ...) ایجاد کرده و در ضمن آن شرایط اولیه حرکت لینک‌ها و مفاصل را نیز تعریف نمود. پس از آن شبیه‌سازی و تحلیل دینامیکی مکانیزم بر اساس روابط هندسی و معادلات سینماتیکی و دینامیکی موجود، توسط این نرم‌افزار امکان پذیر بوده و می‌توان خروجی‌های مورد نظر را در مدت زمان شبیه‌سازی مشاهده کرد.

### مأموریت اول: اعمال نیرو به دیوار و نوسان مجری نهایی در راستای مماس بر سطح

در این مأموریت ابتدا مجموعه هگزاروتور و بازوی دو درجه آزادی در یک نقطه اولیه از فضا قرار می‌گیرند. هدف اعمال نیروی افقی ۱ نیوتونی به دیوار، هم‌زمان با نوسان عمودی ۵ سانتیمتری در راستای مماس بر سطح، توسط مجری نهایی است. این مأموریت می‌تواند کاربرهایی مانند تمیز نمودن سطوح و یا بررسی صافی سطح (با قراردادن سنسور مناسب روی مجری نهایی) داشته باشد. در این مأموریت برای بازوی دو درجه آزادی از قانون کنترلی مطابق رابطه (۴۶) استفاده شده است. همچنین برای کنترل پرنده از کنترل‌کننده سلسله‌مراتبی مشتق‌گیر - تناسی PD به همراه یک جبران‌ساز وزن سیستم مطابق رابطه (۵۰) استفاده شده است.

برای شبیه‌سازی ابتدا یک هگزاروتور به همراه بازوی دو درجه آزادی مدل‌سازی شده است که تصویر آن در شکل ۹ دیده می‌شود. دستگاه‌های مختصات مناسب نیز در نرم‌افزار اضافه گردید. در ادامه قیدهای بین این قطعات تعریف گردید. به‌عنوان مثال بین لینک اول بازو و هگزاروتور یک مفصل لولایی تعریف گردید.

است و کنترل‌کننده

$$C = B_{22}^{-1} [M_2 \Sigma (\ddot{x}_d + k_v \dot{x} + k_p x) + h_2 + \underline{A}^T (\underline{\lambda}_d + k_f \underline{\lambda}) - B_{21} U] \quad (40)$$

که در آن  $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}_d - \underline{\lambda} \dot{x} = \underline{x}_d - \underline{x}$  و به ترتیب انحراف مجری نهایی بازو از مسیر حرکت و انحراف نیرو از مقدار مطلوب هستند. و کنترل‌کننده (۴۰) مقادیر خطای موقعیت و نیرو را به صفر میل داده و موجب تامین موقعیت و نیروی مطلوب می‌شود. برای اثبات این کار کافیست مقدار کنترل‌کننده رابطه (۴۰) در معادلات حرکت سیستم مقید (رابطه (۳۹)) قرار داده شود در این صورت خواهیم داشت.

$$M_2 \Sigma (\ddot{x}_d + k_v \dot{x} + k_p x) + \underline{A}^T (\underline{\lambda}_d + k_f \underline{\lambda}) = 0 \quad (41)$$

با پیش‌ضرب رابطه فوق در  $\underline{\Sigma}^T$  و توجه به رابطه (۳۵) (که نتیجه می‌دهد  $\underline{\Sigma}^T \underline{A}^T = 0$ )، رابطه (۴۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\underline{M}^* (\ddot{x}_d + k_v \dot{x} + k_p x) = 0 \quad (42)$$

که باتوجه به معکوس پذیر بودن  $\underline{M}^* = \underline{\Sigma}^T M_2 \Sigma$  نتیجه می‌دهد.

$$\ddot{x}_d + k_v \dot{x} + k_p x = 0 \quad (43)$$

$$\ddot{x}, \dot{x} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

با جای‌گذاری رابطه (۴۳) در معادله (۴۱) برای خطای نیرو ثابت می‌شود.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{A}^T (\underline{I} + \underline{k}_f) \underline{\lambda} = 0 \quad (44)$$

باتوجه به اینکه ستون‌های ماتریس  $\underline{A}^T$  مستقل خطی هستند (وجود  $p$  قید مستقل) و باتوجه به اینکه ماتریس  $\underline{I} + \underline{k}_f$  مثبت معین است. (با فرض اینکه ماتریس  $\underline{k}_f$  یک ماتریس قطری مثبت معین باشد) حتماً

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\lambda} = 0 \quad (45)$$

### ترکیب کنترل‌کننده موقعیت با کنترل‌کننده مقید نیرو

باتوجه به اینکه کنترل‌کننده مقید نیرو، برای زمانی است که مجری نهایی با محیط تماس داشته باشد و مسیر مطلوب را طی کند، برای استفاده از این کنترل‌کننده، بایستی با یک کنترل‌کننده موقعیت به‌صورت رابطه (۴۶) ترکیب شود. این کار به این دلیل انجام می‌شود که قبل از تماس مجری نهایی با سطح محیط، سیستم دارای ۵ درجه آزادی مستقل است و کنترل‌کننده مربوط به موقعیت با این ۵ درجه آزادی سروکار دارد. اما پس از تماس مجری نهایی با سطح محیط، سیستم مقید شده و تعداد درجات آزادی آن به ۴ کاهش می‌یابد.

$$\tau = K_{pos} (\text{Position Controller}) \quad (46)$$

$$+ K_{force} (\text{Constraint Force Controller})$$

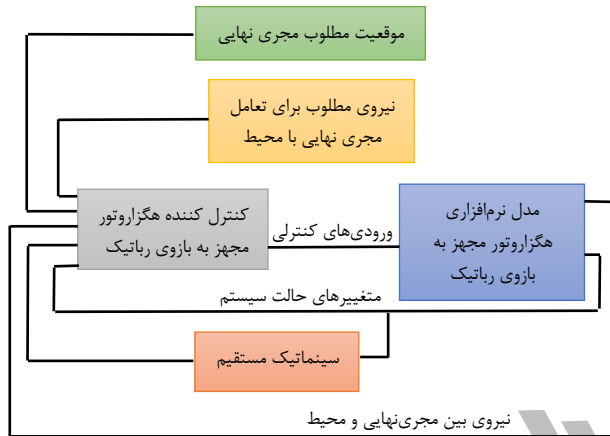
$$+ \text{Non Linear Terms in Equation of Motion} + \text{External Force}$$

در قانون کنترلی (۴۶)  $K_{pos}$  ضریب کنترل‌کننده موقعیت و  $K_{force}$  ضریب کنترل‌کننده مقید نیرو در هنگام تماس مجری نهایی با محیط است. برای انتخاب ضرایب  $K_{pos}$  و  $K_{force}$  بایستی به نحوی عمل شود که قبل از تماس با سطح، تنها کنترل‌کننده موقعیت

ضریب سفتی سطح نیز به صورت زیر تعریف می گردد. البته باتوجه به اینکه کنترل کننده مقید نیرو مستقل از ضریب سفتی سطح می باشد، تا جایی که عملگرهای سیستم دچار اشباع نشوند، نیروی مطلوب عمود بر سطح اعمال می گردد.

$$K_e = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ضریب کنترل کننده مقید نیرو نیز برابر با  $k_f = 2$  انتخاب می گردد. همچنین نیروی مطلوب برابر  $\lambda_d = 1N$  انتخاب می شود.

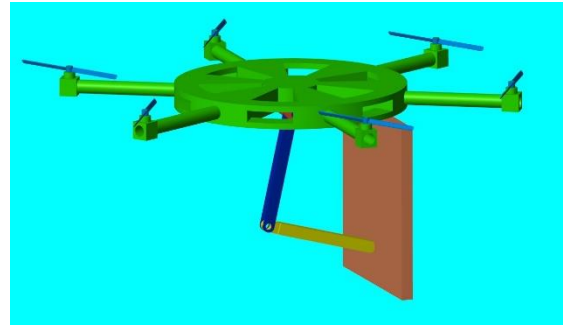


شکل ۱۰: بلوک دیاگرام هگزاروتور مجهز به بازو و کنترل کننده پیاده شده در محیط شبیه ساز SimMechanics

برای شبیه سازی شرایط زیر در نظر گرفته شده است.

- جرم پرنده و هر لینک بازو به ترتیب ۲۰۰ گرم و ۵۰ گرم، هندسه هگزاروتور استوانه ای شکل، به ابعاد  $4 \times 2 \times 20$  سانتی متر و طول هر لینک بازو ۲۰ سانتی متر است.
- پرنده در لحظه شروع دارای شرایط اولیه به صورت زیر است.  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ -10^\circ \ 110^\circ \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
- هدف اعمال نیرو ۱ نیوتونی عمودی بر سطح با نوسان عمودی مجری نهایی با دامنه ۵ سانتی متر است.
- باد با سرعت ۶ کیلومتر بر ساعت با دامنه نوسان ۲ کیلومتر بر ساعت به شبیه سازی اضافه شده است.

از نمودار ۱\_الف تا نمودار ۱\_ه، مختصات های تعمیم یافته سیستم آورده شده است که در این نمودارها اثرات دینامیک غیر خطی سیستم (به خصوص نمودارهای ۱\_الف)، (ج) و (د) به وضوح دیده می شود. همچنین با توجه به اینکه همواره مجری نهایی در حال حرکت می باشد، این رفتار در طول مدت شبیه سازی در سیستم باقی می ماند. نمودار ۱\_و) موقعیت دوبعدی مجری نهایی، نمودار ۱\_ز) و نمودار ۱\_ح) به ترتیب موقعیت طولی و عرضی مجری نهایی بر حسب زمان است. همان طور که در نمودار ۱\_ز) و نمودار ۱\_ح) مشخص است پس از طی حدود ۲ ثانیه ردیابی مسیر عمودی توسط مجری نهایی با دقت مناسبی انجام شده است. همچنین موقعیت مرکز هگزاروتور (نمودار ۱\_الف) و نمودار ۱\_ب)) و زاویه پیچ آن (نمودار ۱\_ج))



شکل ۹: پیکربندی سیستم شبیه سازی شده در نرم افزار برای تماس با دیوار

همچنین مختصات تعمیم یافته مناسب برای کنترل سیستم، تعریف شده و به کنترل کننده داده شود تا ورودی کنترلی مناسب را به سیستم اعمال نماید. با توجه به اینکه در حین شبیه سازی، نیاز به اندازه گیری نیروی تماسی بین مجری نهایی و سطح وجود دارد، برای این منظور سنسور اندازه گیری نیرو، بین مجری نهایی و سطح تعریف شده است. در شکل ۱۰ بلوک دیاگرام سیستم برای شبیه سازی در نرم افزار آورده شده است. مختصات تعمیم یافته به همراه موقعیت مجری نهایی (که از همان مختصات های تعمیم یافته با روابط سینماتیک مستقیم استخراج می شود) به کنترل کننده داده شده است. همچنین مقدار مطلوب موقعیت و نیروی مجری نهایی به همراه نیروی واقعی (اندازه گیری شده توسط سنسور نیرو)، به کنترل کننده داده می شود. در نهایت کنترل کننده با در نظر گرفتن این مقادیر، ورودی های کنترلی مناسب را به مدل نرم افزاری پیاده شده بازو، اعمال می نماید.

برای کنترل موقعیت سیستم قبل از تماس با دیوار، موقعیت مطلوب مجری نهایی به صورت زیر انتخاب می شود که به معنای حرکت عمودی مجری نهایی با دامنه ۵ سانتی متر است.

$$x_d = 0.1 \text{ m}, \quad y_d = -0.1 - 0.05 \sin(t) \text{ m} \quad (49)$$

همچنین برای ورودی های هگزاروتور  $U = \begin{bmatrix} F \\ T \end{bmatrix}$  یعنی ورودی های هگزاروتور، قانون کنترلی سلسله مراتبی به نحوی تعیین می شود که موقعیت مرکز هگزاروتور در فاصله ثابتی از محیط مورد تعامل بماند. جبران ساز وزن نیز در کنترل کننده (۵۰) اضافه شده است.

$$U = \begin{bmatrix} F \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3)g \\ 0 \end{bmatrix} + K_V^U \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \\ 0.8q_1 - \dot{q}_3 \end{bmatrix} + K_P^U \begin{bmatrix} -q_2 \\ 0.4q_1 - q_3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

در رابطه (۵۰)  $K_V^U$  و  $K_P^U$  به ترتیب ماتریس ضرایب کنترلی تناسبی و مشتق گیر برای کنترل هگزاروتور هستند و به صورت زیر انتخاب شده است.

$$K_P^U = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, K_V^U = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

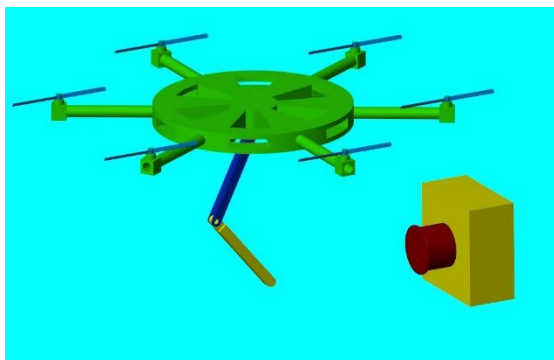
همچنین ضرایب کنترلی تناسبی و مشتق گیر کنترل موقعیت برای بازوی دو درجه آزادی (رابطه (۲۹)) به صورت زیر انتخاب می شود.

$$K_P^C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3.8 \end{bmatrix}, K_V^C = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 7.3 \end{bmatrix}$$

زیادی نداشته باشند. همچنین نمودار ۲\_الف) که نشان دهنده نیروی عمودی وارد بر سطح است، بیانگر این است که نیروی مطلوب با نوسان کمی ردیابی شده که این نوسان کم، ناشی از اغتشاش نیروی نوسانی باد می‌باشد. نمودار ۲\_ب) نیز نشان دهنده نیروی مماس بر سطح می‌باشد که با توجه به صرف نظر کردن از اصطکاک، مقدار این نیرو توسط سنسور نیرو، صفر اندازه‌گیری شده است. در نتیجه این شبیه‌سازی سیستم در حضور اغتشاش باد با سرعت کم به خوبی مأموریت خود را انجام داده است.

### مأموریت دوم: فشردن کلید قطع اضطراری

در این مأموریت نیز مشابه مأموریت اول، ابتدا مجموعه هگزاروتور و بازوی دو درجه آزادی در یک نقطه اولیه از فضا قرار می‌گیرند. هدف این مأموریت اعمال نیرو به یک کلید قطع اضطراری است. این مأموریت می‌تواند کاربرد مناسبی هنگام وقوع بحران داشته باشد. به عنوان مثال هنگامی که در یک مجموعه صنعتی یک دستگاه از کنترل خارج شده و هر لحظه امکان انفجار و آتش‌سوزی وجود دارد، هگزاروتور و بازو می‌توانند با فشردن دکمه قطع اضطراری در محیطی که حضور برای انسان خطرناک است، نقش‌آفرینی کنند. تصویر محیط شبیه‌سازی انجام شده برای این مأموریت در شکل ۱۱ آورده شده است.



شکل ۱۱: سیستم شبیه‌سازی شده در نرم افزار برای فشردن کلید قطع اضطراری

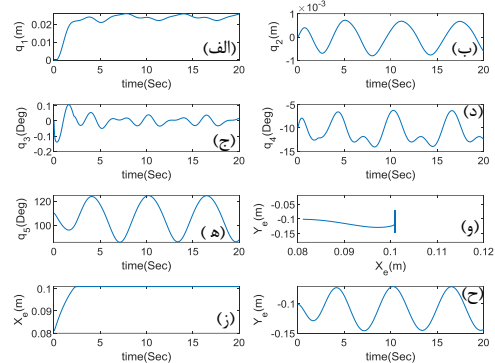
در این مأموریت تمامی فرضیات و ضرایب کنترلی مانند مأموریت اول می‌باشد. تنها تفاوت این مأموریت عبارتند از:

- شرایط اولیه سیستم به صورت زیر است.
- با توجه به اینکه محیط مورد تعامل سوئیچ قطع اضطراری می‌باشد، ماتریس ضریب سفتی محیط به صورت زیر می‌باشد.

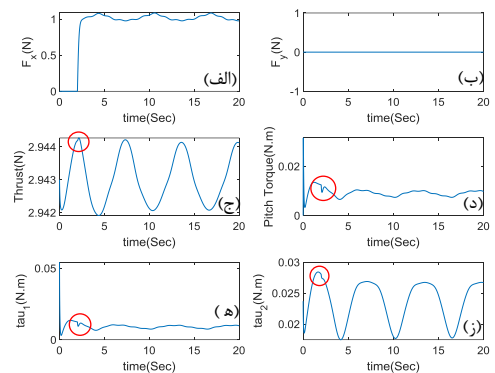
$$K_e = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نتایج شبیه‌سازی این مأموریت در نمودار ۳ و نمودار ۴ آورده شده است. این نمودارها مشابه نمودارهای مأموریت اول هستند. با بررسی مختصات‌های تعمیم یافته، نمودار ۳\_الف) تا نمودار ۳\_ه) ، نتیجه حاصل می‌شود که اثرات غیر خطی بر خلاف مأموریت اول به طور

رفتاری نوسانی با دامنه کم از خود نشان می‌دهند. این نوسان هم به دلیل نقصان عملگر و وجود دینامیک داخلی، و هم ناشی از اغتشاش نوسانی نیروی باد می‌باشد که هر دو قابل انتظار بود. این نوسان در ورودی‌های کنترلی نیز مشاهده گردید. (از نمودار ۲\_ج) تا نمودار ۲\_ز)) بنابراین با توجه به اینکه خروجی‌های سیستم به مقادیر مطلوب همگرا شده و نوسان دینامیک داخلی محدود می‌باشد، عملکرد سیستم مورد قبول واقع می‌شود.



نمودار ۱: نمودار مختصات تعمیم یافته، مسیر مجری نهایی و موقعیت طول و عرض مجری نهایی بر حسب زمان برای مأموریت اول



نمودار ۲: نیروی‌های وارد شده به مجری نهایی و سیگنال‌های کنترلی مأموریت اول

پس از تماس مجری نهایی با سطح عمودی، کنترل‌کننده موقعیت از مدار کنترلی خارج شده و کنترل‌کننده مقید نیرو وارد مدار می‌شود. این موضوع در نمودار ۲\_ج) تا نمودار ۲\_ز) که نشان‌دهنده سیگنال‌های کنترلی است، به خوبی دیده می‌شود. نقاطی که با دایره قرمز مشخص شده‌اند بیانگر لحظه تماس مجری نهایی با دیوار هستند. همان‌طور که مشخص است در این نقطه جهش در ورودی‌های کنترلی اتفاق می‌افتد که این جهش به دلیل تغییر کنترل‌کننده از کنترل موقعیت به کنترل‌کننده مقید نیرو است. برای اینکه این جهش مقدار کمی داشته باشد و سیستم در مشتق ورودی‌ها دچار اشباع نشود، سعی شده تا ضرایب کنترل‌کننده‌های موقعیت و کنترل‌کننده مقید نیرو به نحوی انتخاب شوند که ورودی‌های کنترلی در لحظه تماس، جهش

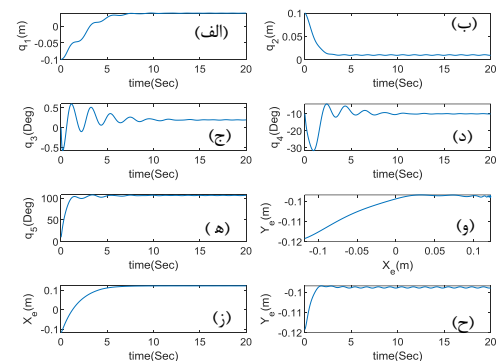
سفتی کمتری دارد (محیط نرم‌تر است). اما در مأموریت اول، به دلیل سفت‌تر بودن محیط مورد تعامل، جهش در ورودی‌های کنترلی محسوس‌تر می‌باشد. بنابراین سیگنال‌های کنترلی، کنترل‌کننده طراحی شده برای محیط‌های سفت جهش بیشتر و برای محیط‌های نرم جهش ناچیزی خواهد داشت.

### جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

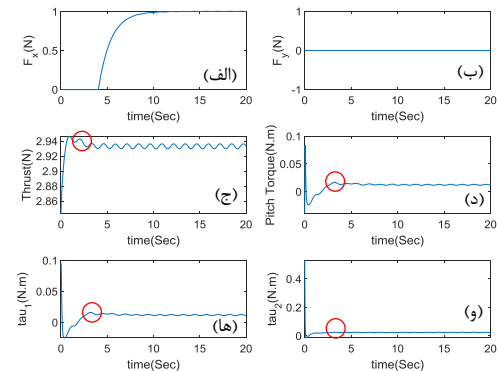
در این مقاله هدف تعامل یک هگزاروتور مجهز به بازوی دو درجه آزادی با محیط بود. برای این منظور ابتدا معادلات سینماتیکی، سپس معادلات دینامیکی سیستم به کمک روش اویلر - لاگرانژ استخراج گردید. باتوجه‌به اینکه سیستم دارای نقصان عملکرد در ورودی است معادلات دینامیکی به فرمی بازنویسی گردید که تعدادی از ورودی‌ها برای اعمال نیرو به محیط توسط بازوی رباتیکی، و تعدادی از ورودی‌ها برای حفظ موقعیت هگزاروتور مورد استفاده قرار گرفت. در ادامه از ترکیب یک کنترل‌کننده موقعیت با کنترل‌کننده مقید نیرو به منظور اعمال نیروی ثابت با نوسان عمودی مجری نهایی استفاده گردید. مزیت کنترل‌کننده مقید هنگام تعامل با محیط، مستقل بودن آن از سفتی سطح می‌باشد.

برای شبیه‌سازی عملکرد کنترل‌کننده، مجموعه متشکل از هگزاروتور مجهز به بازو در یک محیط نرم‌افزاری نزدیک به واقعیت پیاده‌سازی شده و عملکرد آن برای انجام دو مأموریت مورد ارزیابی قرار گرفت. در نتیجه این شبیه‌سازی، باتوجه‌به اینکه سیستم دارای نقصان عملکرد می‌باشد، برای مختصه‌های موقعیت و زاویه‌ی پیچ هگزاروتور نوسان محدودی مشاهده گردید که هم ناشی از وجود دینامیک داخلی سیستم و هم به دلیل اثر اغتشاش باد بود. مأموریت اول اعمال نیرو به دیوار با نوسان عمودی در راستای مماس بر سطح بود که مجری نهایی بازو پس از حدود ۲ ثانیه با محیط تماس پیدا کرده و به آن نیرو با نوسان ناچیز اعمال نمود. این نوسان ناچیز به دلیل اغتشاش نوسانی باد می‌باشد. همچنین با توجه به رفتار نوسانی مجری نهایی، اثرات دینامیک غیرخطی سیستم به وضوح در مختصات تعمیم یافته رویت گردید. با توجه به اینکه از اصطکاک صرف‌نظر شده است در راستای مماس بر سطح نیروی مطلوب ۱ نیوتونی با نوسان ناچیز اعمال گردید. سوئیچ بین کنترل‌کننده موقعیت و کنترل‌کننده مقید نیرو در ورودی‌های کنترلی به صورت جهش مشاهده گردید که مقدار زیادی نبوده و قابل قبول می‌باشد. مأموریت دوم فشردن کلید قطع اضطراری بود که پارامترهای شبیه‌سازی تقریباً مشابه مأموریت اول بود و تنها در شرایط اولیه و ضریب سفتی محیط متفاوت بود. با توجه به اینکه محل اعمال نیرو در این مأموریت ثابت بود، اثرات دینامیک غیرخطی به طور محسوسی در نمودار مختصات تعمیم‌یافته مشاهده نگردید. تماس

محسوسی مشاهده نگردید. این موضوع را می‌توان اینگونه توضیح داد که با توجه به ثابت بودن محل اعمال نیرو، این اثرات که در حرکت‌های نوسانی محسوس‌تر می‌شوند، کمتر در نتایج مشاهده گردید. همچنین همان‌طور که در نمودار ۴\_الف) مشخص است پس از طی حدود ۴ ثانیه مجری نهایی با سوئیچ تماس پیدا می‌کند و آن را فشرده می‌نماید تا در نهایت نیروی ۱ نیوتونی بدون نوسان، به آن اعمال گردد. همچنین مشابه مأموریت اول موقعیت مرکز جرم و زاویه پیچ هگزاروتور، رفتاری نوسانی با دامنه محدود و کمتر از مأموریت اول از خود نشان می‌دهد. دلیل کم‌تر بودن این نوسان ثابت بودن موقعیت مجری نهایی است. این نوسان در سیگنال‌های کنترلی نیز دیده می‌شود. (نمودار ۴\_ج) تا نمودار ۴\_و)



نمودار ۳: نمودار مختصات تعمیم یافته، مسیر مجری نهایی و موقعیت طول و عرض مجری نهایی بر حسب زمان برای مأموریت دوم



نمودار ۴: نیروی‌های وارد شده به مجری نهایی و سیگنال‌های کنترلی مأموریت دوم

پس از تماس مجری نهایی با سطح سوئیچ، کنترل‌کننده موقعیت از مدار کنترلی خارج شده و کنترل‌کننده مقید نیرو وارد مدار می‌شود. این موضوع در نمودار ۴\_ج) تا نمودار ۴\_ز) دیده می‌شود. مشابه نقاطی که با دایره قرمز مشخص شده‌اند بیانگر لحظه تماس مجری نهایی با دیوار هستند. در این مأموریت مقدار این جهش برخلاف مأموریت اول بسیار ناچیز می‌باشد. این مساله را می‌توان اینگونه تفسیر نمود که در این مأموریت، محیط مورد تعامل با مجری نهایی، ضریب

- استفاده از هگزاروتورهایی که زاویه موتور نسبت به بدنه متغیر است. این هگزاروتورها مشکل نقصان عملکرد را نداشته و می‌توان تمامی درجات آزادی را کنترل نمود.
- پیاده‌سازی کنترل‌کننده طراحی شده به صورت عملی و بررسی چالش‌های مربوط به پیاده‌سازی کنترل‌کننده
- استفاده از کنترل‌کننده مقید نیرو برای کنترل یک بازوی رباتیک با پایه متحرک زمینی برای توسعه کاربردهای آن

### فهرست علائم

ارتفاع بدنه هگزاروتور	2b
ورودی‌های کنترلی برای ارضا قیدها	C
قطر بدنه هگزاروتور	2d
برآیند نیروی تراست موتورها	F
معادله قیدها	$g_i$
ماتریس عبارات غیرخطی	$h(q)$
ماتریس ضریب سفتی محیط	$K_e$
ضریب تناسبی کنترل‌کننده نیرو	$k_f$
ماتریس ضرایب کنترلی تناسبی	$K_p$
ماتریس ضرایب کنترلی مشتق‌گیر	$K_v$
طول لینک بازوی رباتیک	L
لاگرانژین	$L_g$
ماتریس جرم	$M(q)$
مختصات‌های تعمیم‌یافته سیستم	$q_i$
ماتریس دوران	R
ماتریس انتقال	T
انرژی جنبشی	T
ورودی‌های کنترلی برای کنترل وضعیت هگزاروتور	U
انرژی پتانسیل	V
بردار سرعت دستگاه مختصات	v
بردار موقعیت مجری نهایی	x
بردار موقعیت محیط	$x_e$

مجری نهایی با سویچ قطع اضطراری در حدود ثانیه ۴ رخ داد و در نهایت نیروی ۱ نیوتونی بدون نوسان (به دلیل ثابت بودن موقعیت مجری نهایی) به آن اعمال گردید. همچنین با توجه به اینکه محیط مورد تعامل نرم‌تر بود (ضریب سفتی کمتر)، جهش محسوسی در ورودی‌های کنترلی سیستم رویت نگردید. بنابراین می‌توان اینگونه جمع‌بندی نمود که این سیستم برای اعمال نیرو به نقاط غیرثابت رفتار دینامیکی غیرخطی محسوسی دارد و همچنین هنگام اعمال نیرو به محیط‌های سفت‌تر، به دلیل سویچ بین کنترل‌کننده‌ها، جهش محسوسی در ورودی‌های کنترلی دیده می‌شود. همچنین برای هر دو مأموریت اغتشاش نیروی باد روی سیستم مورد ارزیابی قرار گرفت که سیستم مقاومت مناسبی نشان داد.

با مقایسه مقاله حاضر نسبت به پژوهش‌های قبلی نقاط قوت و ضعف آن روشن می‌شود. به‌عنوان نمونه در [۳] از یک پرنده با بازوی ثابت، برای باز و بسته کردن یک شیر توسط کنترل‌کننده موقعیت استفاده شده است. این نوع کنترل زمانی که نیروی مورد نیاز برای چرخاندن شیر ناچیز و یکنواخت باشد بدون مشکل وظیفه خود را انجام می‌دهد اما زمانی که نیرو قابل توجه و غیریکنواخت باشد، امکان ناپایداری در سیستم وجود خواهد داشت. به عبارت دیگر تعامل با محیط تنها به عنوان یک اغتشاش خارجی در نظر گرفته شده است. مزیت مقاله حاضر نسبت به این پژوهش استفاده از کنترل نیرو به جای کنترل موقعیت و استفاده از بازوی دو درجه آزادی به جای بازوی ثابت می‌باشد. همچنین در [۲] اعمال نیرو به یک نقطه فقط در یک جهت عمود بر پرنده به کمک بازوی غیر فعال انجام شده است. اما در مقاله حاضر اعمال نیرو در هر جهت دلخواه امکان پذیر می‌باشد. در [۴] و [۵] اعمال نیرو به یک نقطه ثابت مورد بررسی قرار گرفته بود که در این پژوهش‌ها به ترتیب توسط یک بازوی یک درجه آزادی لولایی و دو درجه آزادی لولایی - کشویی انجام گردید. اما در مقاله حاضر اعمال نیرو توسط یک بازوی دو درجه آزادی لولایی برای نقطه غیرثابت انجام گردید. همچنین در این پژوهش‌ها اغتشاشات باد در نظر گرفته نشده و اعمال نیرو در یک محیط آرام انجام شده است. اما در مقاله حاضر تاثیر اغتشاشات نیروی باد با سرعت کم روی سیستم بررسی گردید و مقاومت سیستم مورد بررسی و تایید قرار گرفت.

### پیشنهادها برای پژوهش‌های آینده

- برای ادامه پژوهش‌ها در این زمینه پیشنهادها زیر ارائه می‌شود.
- افزایش درجات آزادی بازوی رباتیکی که می‌تواند به افزودنی بازوی رباتیکی برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های بهینه کنترلی و یا کنترل گشتاور در مجری نهایی کمک کند.



Soft gripper	پنجه نرم	بردار انحراف از قیدها	$\delta$
Compensator	جبران ساز	بردار سرعت زاویه‌ای	$\omega$
Take off	برخاست	بردار موقعیت دستگاه‌های مختصات	$\rho$
Hexarotor	پرنده شش موتور	برآیند گشتاور موتورها در راستای محور عمود بر صفحه	$\tau$
Single body	تک جسمی	گشتاور وارد به لینک اول از طریق هگزاروتور	$\tau_1$
Multi body	چند جسمی	گشتاور وارد به لینک دوم از طریق لینک اول	$\tau_2$
Under actuated	نقصان عملگر		
Lift	لیفت		
Drag	درگ		
Pitch angle	زاویه پیچ	Aerial arm	بازوی هوایی
Generalized coordinate	مختصات تعمیم یافته	End-effector	مجری نهایی
Pseudo inverse	شبه معکوس	Passive	غیرفعال
Constraint force control	کنترل مقید نیرو	Framework	چارچوب
Non redundant	غیر افزونه	Sampling-based Predictive controller	کنترل کننده پیش بین نمونه بردار محور
Heaviside	پله	Impedance control	کنترل امپدانس
		Compliant behavior	رفتار نرم

## واژه نامه

## مراجع

- [1] M. Pedrocco, A. Pasetto, G. Fanti, A. Benato, and S. Cocuzza, "Trajectory Tracking Control of an Aerial Manipulator in the Presence of Disturbances and Model Uncertainties," *Applied Sciences*, vol. 14, p. 2512, Jun. 2024, doi: 10.3390/app14062512.
- [2] A. E. Jimenez-Cano, G. Heredia, and A. Ollero, "Aerial manipulator with a compliant arm for bridge inspection," in *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2017, pp. 1217–1222. doi: 10.1109/ICUAS.2017.7991458.
- [3] M. Brunner, G. Rizzi, M. Studiger, R. Siegwart, and M. Togonon, "A Planning-and-Control Framework for Aerial Manipulation of Articulated Objects," *IEEE Robot Autom Lett*, vol. 7, no. 4, pp. 10689–10696, 2022, doi: 10.1109/LRA.2022.3191178.
- [4] H. W. Wopereis, J. J. Hoekstra, T. H. Post, G. A. Folkertsma, S. Stramigioli, and M. Fumagalli, "Application of substantial and sustained force to vertical surfaces using a quadrotor," in *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2017, pp. 2704–2709. doi: 10.1109/ICRA.2017.7989314.
- [5] S. Hamaza, I. Georgilas, and T. Richardson, "Towards an Adaptive-Compliance Aerial Manipulator for Contact- Based Interaction," in *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2018, pp. 1–9. doi: 10.1109/IROS.2018.8593576.

- [6] Q. Liu *et al.*, “A Compact Aerial Manipulator: Design and Control for Dexterous Operations,” *J Intell Robot Syst*, vol. 110, no. 2, p. 66, 2024, doi: 10.1007/s10846-024-02090-7.
- [7] H. Paul, R. Miyazaki, T. Kominami, R. Ladig, and K. Shimonomura, “A Versatile Aerial Manipulator Design and Realization of UAV Take-Off from a Rocking Unstable Surface,” *Applied Sciences*, vol. 11, no. 19, 2021, doi: 10.3390/app11199157.
- [8] G. Zhang, Y. He, B. Dai, F. Gu, J. Han, and G. Liu, “Robust Control of an Aerial Manipulator Based on a Variable Inertia Parameters Model,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 11, pp. 9515–9525, 2020, doi: 10.1109/TIE.2019.2956414.
- [9] N. Sadeghzadeh Nokhodberiz, M. Iranshahi, and A. Montazeri, “Vision-based particle filtering for quad-copter attitude estimation using multirate delayed measurements,” *Front Robot AI*, vol. 10, Feb. 2023, doi: 10.3389/frobt.2023.1090174.
- [10] M. Aalipour, A. Mokhtarian, and H. Karimpour, “Nonlinear Control of Motion of A Spherical Robot on Inclined Surfaces Based on Feedback Linearization Method,” *Journal Of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 31, no. 2, pp. 91–104, 2020, doi: 10.22067/fum-mech.v31i2.74433.
- [11] M. Moussid, A. Sayouti, and H. Medromi, “Dynamic Modeling and Control of a HexaRotor using Linear and Nonlinear Methods,” *Int J Appl Inf Syst*, vol. 9, pp. 9–17, Feb. 2015, doi: 10.5120/ijais2015451411.
- [12] J. J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [13] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, 4th ed. Cham, Switzerland: Springer, 2014.